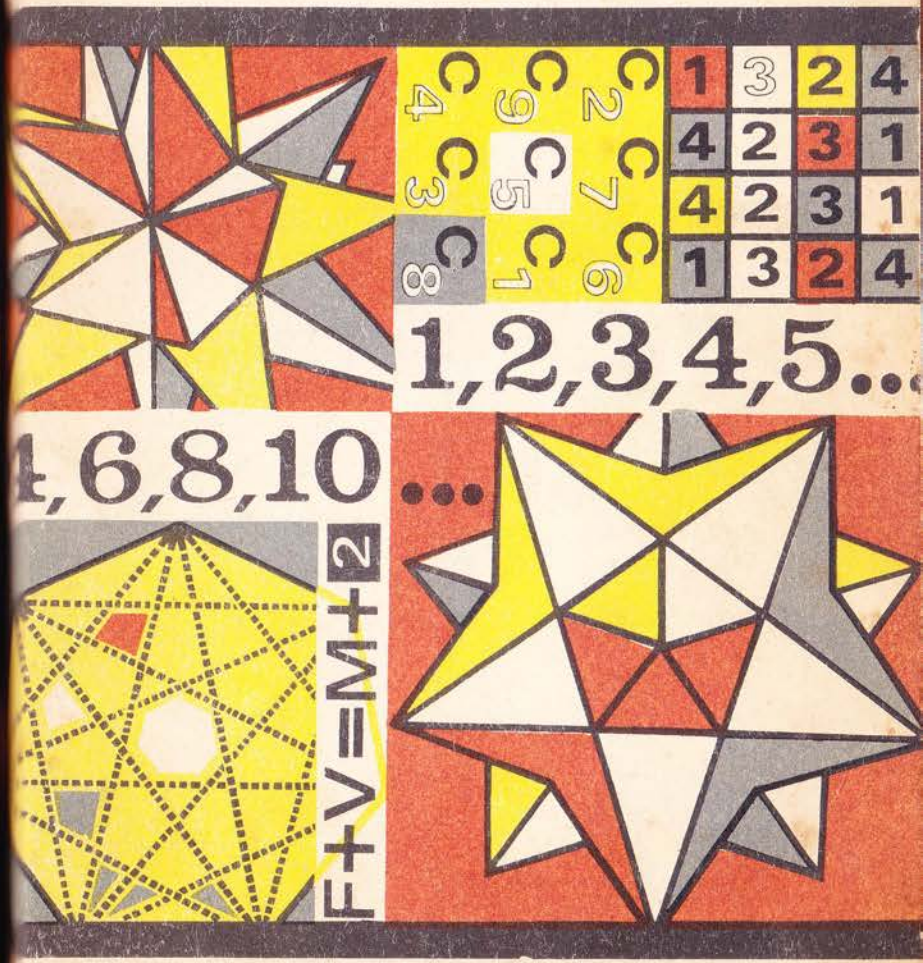
A doua carte cu probleme celebre din istoria matematicii alătură primei, altă serie de probleme și comentarii interesante, unele cu aplicații curente în zilele noastre. Iată cîteva: «Problema infinitului în matematică», «Problema intuiției spațiale», «Începuturile calculului diferențial», «Noțiunea de grup» etc.

Realizat ca și primul sub forma unui dialog spumos, volumul reprezintă o lectură instructivă și agreabilă pentru orice începător sau cunoscător în ale matematicii.

Vol. I–II Lei 10

Florica T. Câmpan

A doua carte cu PROBLEME CELEBRE



Lyceum

Editura Albatros

Coperta de
VASILE ROMAN

Lyceum

Prof. dr. docent
Florica T. Câmpan

A doua carte cu PROBLEME CELEBRE

din istoria matematicii

Editura Albatros

PROBLEMA INFINITULUI ÎN MATEMATICĂ

sau

Povestea lui Epimenide cel Mincinos

Am hotărît să-mi petrec cele patru zile de vacanță din jurul Armindenului la Cîmpulung, unde mă chemase prietenul meu Teodor Solonar, curios fiind să afle cît mai repede impresiile cu care m-am întors din Anglia. Ca bucuria să-i fie mai mare, i-am scris că nu pot veni și, cînd nu mă mai aștepta, s-a pomenit cu mine. Am deșertat sacul cu noutăți și chiar a doua zi am pornit-o, prin Valea Seacă, înspre Rarăul după care tînjeam. În drum am salutat pădurile, pîraiele și izvoarele și, după ce ne-am închinat Pietrelor Doamnei, am poposit la cabană, hotărîți să ne culcăm devreme ca să prindem răsăritul soarelui. Cînd să aținesc, aud glasul prietenului meu:

— De ce mi-ai scris că nu poți veni? Ce piedică ai avut?

— Nici una, i-am răspuns amuzat la gîndul că amînase atîta vreme explicația. Te-am mințit!

— Ai mințit? a îngînat el, ca dus de gînduri.

Credeam că îi era somn și am tăcut, dar el a scăpărat un chibrit și după ce și-a aprins țigara și a tras cîteva fumuri, a adăugat:

— Drept să-ți spun, nu pot ști dacă-i adevărat sau mă amăgești!

Nu mi-a plăcut răspunsul și ridicîndu-mă în capul oaselor i-am replicat:

—Adică te îndoiești de adevărul vorbelor mele? Dacă-i așa, să știi că mîine plec la Iași!

— Mîine te poți duce și la Londra, că și așa văd că te-au înstrăinat străinătățile, de nu-i chip să te ating nici cu o floare...

— Flori am zărit eu prin pădure. Mata ai atins cu parul!

— Ba nu! Și dacă nu ți-e somn, mă prind să ți-o dovedesc.

— Parcă de răul matale mai poate avea omul somn, am bombănit eu, bucuros de întorsătură.

— Atunci, a continuat el, hai să zicem că te cred. Spunînd adevărat că ai mințit, înseamnă că m-ai amăgit. Și dacă ai spus o minciună...

— Rezultă că am spus un adevăr, fiind adevărat că am spus o minciună! i-am luat eu vorba din gură. Va să zică mi-l măimuțărești pe Epimenide, în miez de noapte?

— Va să zică a fost par sau floare?

— Cu o floare ca asta nu se face primăvară, dar mă tem că se va face ziuă!

— Nu te teme! Hai, noapte bună!

— După ce m-ai stîrnit, nu te mai preface! Parcă nu știu că marfa ta așteaptă cam de multișor, mușteriul?

— E adevărat, numai că alta-i marfa care stă gata, pregătită. Asta a căzut chilipir, cînd ai rostit forma schematică, echivalentă cu paradoxul lui Epimenide. Atunci mi-am zis: dacă nu bagă de seamă, îl trag pe sfoară!

— Ia stai! Nu-s beat de somn și cred că am înțeles bine! Cum? Voi matematicienii n-ați mai avut alta de schematizat decît exuberanta expresie a poetului cretan, pe care noi, cei îndrăgostiți de ea, am păstrat-o cu grijă, timp de peste 26 de veacuri? Ați îndrăznit să aruncați la gunoi această bijuterie unică: „Toți cretanii sînt mincinoși", înlocuind-o cu o formulă grosolană ca „eu mint" sau „am mințit"? Și tu te-ai făcut părtaș acestei monstruozități, fără să tremuri de indignare? Unde găsești echivalență între: „Toți cretanii sînt mincinoși", care-i tip de judecată antinomică[1], și „eu mint" care, nici măcar, nu-i judecată? Cum de ai acceptat uscăciunea acestei propoziții în locul luxuriantei atmosfere pe care o evocă declarația poetului cretan? Nu ți-a sunat oare și ție în urechi, ascultînd-o, vuietul mării? Nu ai simțit gustul sărat al aerului și n-ai zărit cretanii nedumeriți, adunați în piața publică, întrebîndu-se unul pe altul: „Ce i-a venit poetului nostru, să spună așa ceva? Dacă toți cretanii sînt mincinoși, atunci el trebuie să fi spus o minciună, căci și el e cretan! — Dar dacă a spus o minciună, minciuna lui e un adevăr! Așa-i! Parmenide a spus un adevăr! Dar dacă a zis un adevăr, acesta e și mai dihai minciună, fiindcă și el este cretan!"

— Vai! Vai! Nici așa nu-i bine! Hai să o luăm de la început!... Să aflăm odată ce-a spus poetul nostru: Adevăr? Minciună?

— Nu te-au copleșit, prin insistența lor, aceste întrebări, aidoma valurilor ce se izbesc de țărm? Și nici nu le-ai urmărit, răspîndindu-se, de la ureche la ureche, în toate centrele de gîndire elenă? Le-au oploșit cei din Eleea, unde în mintea lui Zenon au rodit alte paradoxuri, încă și mai tulburătoare! Apoi, toate împreună s-au îndreptat înspre Atena, dînd tîrcoale pe la școala lui Platon și furișîndu-se în grădina peripateticienilor. Cît trebuie să-l fi chinuit pe mîndrul Aristotel aceste ispitiri pînă să le fi venit de hac! Cîtă încurcătură nu au provocat paradoxurile, 5 la număr după cîte știu eu, nu numai în antichitate, dar și în Evul Mediu, în Renaștere și chiar mai tîrziu.

—Nu greșești de loc dacă adaugi și timpurile moderne. Faimosul matematician și filozof al vremurilor noastre, Bertrand Russell, a arătat că structura logică a paradoxurilor matematice stabilite de el are aceeași factură cu aceea al lui Parmenide. De altfel tocmai interesul față de ele a

[1] *anti*: contra, *nomos*: lege. Se pun în contradicție două legi, astfel ca adevărul propoziției enunțate să atragă după sine falsitatea ei. Tot așa paradox: *para*: contra și *doxa*: *părere*, înseamnă „părere absurdă", contrară unui adevăr acceptat.

condus la schematizarea care te-a înfuriat, alungîndu-ți somnul. Și dacă n-am de gînd să-ți contrazic observațiile — în unele privințe ai dreptate — recunoaște și tu că propoziția aceasta, așa seacă cum este, te-a tras pe sfoară! Ba, dacă nu o țineam cu bine, te rostogoleai de pe vîrful Rarăului pînă-n tîrgul Iașului și aveam ce alerga după tine ca să te prind! Așa că acum, hai să tragem un pui de somn și mîine dimineață vom vedea noi cum s-or drege lucrurile!

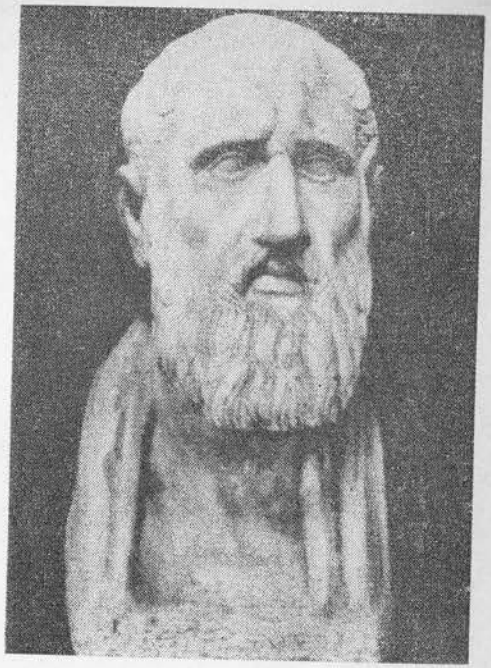
În zori am înotat prin ceață așteptînd Soarele, iar după ce am privit înmărmuriți munții și albastrul cerului, cercînd să străbatem depărtările, ne-am întors la cabană să ne încălzim. Acolo am găsit răgaz să pun întrebările care mă frămîntau:

— Mă gîndesc la paradoxurile lui Zenon, pe care nu te-ai învrednicit să le bagi în seamă, cînd le-am pomenit astă noapte și mă întreb: Oare ce șurubel n-a fost destul de bine strîns, în gingașul mecanism al gîndirii eleatului, de i-au ieșit, așa unul după altul, toate patru deodată?

— Cine știe? Sigur nu-i nimic, dar foarte probabil că nu era ceva în regulă la șurubul infinitului!

— Șurubul infinitului! Da! Acela și acum e greu de mînuit cum trebuie. Oare noi nu ne-am ostenit pînă aici și nu am tremurat mai adineauri, cățărați pe stînci, numai și numai ca să trăim o clipă senzația nelimitării, a infinitului...? Omul trebuie să fi adulmecat infinitul cu sute de mii de ani în urmă, de cînd a început a privi în mod conștient cerul, cu puzderia lui de stele, mai ales în nopțile fără lună! De atunci, a intuit el, în mod treptat, ceva misterios și imposibil de înțeles sau de atins, ceva minunat și înfricoșător, căreia treptat îi va spune *mulțime infinită*, *spațiu infinit*, *timp infinit*, ca mai tîrziu, să desprindă de aici noțiunea exprimată prin cuvîntul *infinit*. Apoi, fiindcă și-a dat seama că infinitul nu va putea fi niciodată stăpînit prin observație directă sau prin experiență, omul a dat frîu liber gîndirii să-l iscodească ea, așa cum îi va veni mai la îndemînă.

— Cam așa trebuie să se fi întîmplat cu mult înainte ca geometria să se fi cristalizat într-o știință cu axiome fixate



Zenon

dinainte, cu teoreme care să decurgă din ele. Prin veacul al V-lea î.e.n. Zenon și-a formulat paradoxurile dintre care azi se cunosc numai 4, acelea pe care, 100 de ani mai tîrziu, le enunță Aristotel ca să le combată, în *Fizica* sa.

— Vorba proverbului: un nebun aruncă o piatră în baltă și 100 de învățați nu pot să o scoată!

— Se potrivește mai bine decît îți închipui, căci deși infinitul apare în geometrie de pe vremea lui Zenon și de atunci se va vorbi mereu de el, nimeni, pînă la sfîrșitul veacului al XIX-lea, nu a fost în stare să precizeze această noțiune. Se considera, îndeobște, infinitul ca o mărime nedefinit de mare — dacă era vorba de *infinitul mare* sau, nedefinit de mică, fără a fi însă egală cu zero, dacă era vorba de *infinitul mic*. Chiar Jules Tannery, subtil matematician

francez, de la sfîrșitul veacului XIX și începutul celui de al XX-lea, scria: „Noțiunea de infinit, din care nu trebuie să se facă un mister, se reduce la aceasta: după fiecare număr întreg există un altul".

— Îmi place foarte mult și mi se pare extrem de clară această definiție!

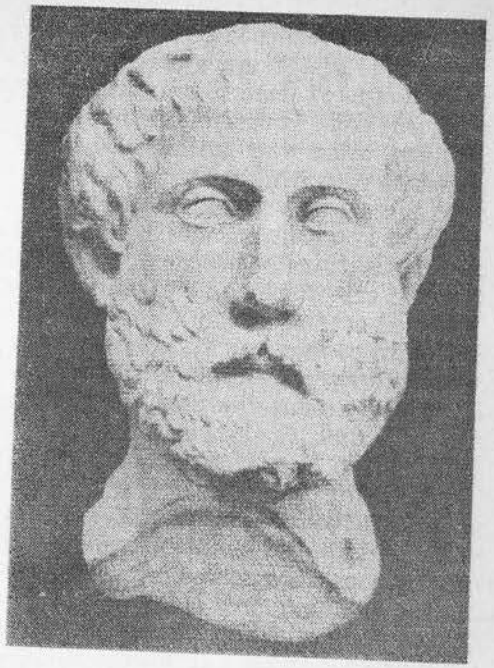
— Probabil că așa i s-a părut și lui. Dar această definiție e departe de a răspunde considerațiilor moderne asupra infinitului. Ea se păstrează încă în concepția dinamică a unui infinit potențial, aceea imaginată de Aristotel cînd a atacat paradoxurile lui Zenon.

— Stai că încep să mă încurc. Ce-ar fi să discutăm problema infinitului începînd chiar cu paradoxurile lui Zenon? Nu numai că mi le-aș aminti, dar privindu-le prin ochiul tău, le-aș vedea, poate, și altfel. Aristotel le prezintă într-o anumită ordine, anume: paradoxul dichotomiei[1], al lui Achile și broasca țestoasă, Săgeata și în fine Stadionul. Am citit, nu știu unde, că Zenon era un țăran autodidact și că devenise prietenul lui Parmenide. Așa s-a inițiat el în problemele geometrilor și le-a prezentat, în semn de omagiu, aceste flori — ca să folosesc imaginea ta de aseară.

— Drept să-ți spun, nu prea văd ce aș mai avea eu de adăugat! Știu că problemele acestea îți plac și cred că ai citit despre ele mai mult decît mine. Dar dacă asta ți-e vrerea, poftim, să începem cu primul.

— Zenon afirmă că dacă spațiul și timpul s-ar divide la infinit, atunci mișcarea ar fi imposibilă. O dovedește arătînd că orice mobil care pornește de la o extremitate a segmentului nu poate ajunge la cealaltă extremitate a lui decît trecînd prin mijlocul acelui segment, or ca să atingă acest punct trebuie să ajungă mai întîi la jumătatea noului segment format și, tot așa înainte. Datorită divizibilității infinite, spune Zenon, mobilului îi trebuie un timp infinit ca să parcurgă această infinitate de segmente! Ei bine, deși știu că Zenon n-are dreptate, fiindcă experiența mea de toate zilele, adică bunul simț, îmi arată că mișcarea este posibilă,

[1] *Dichotomia*: împărțirea în două părți egale.



Aristotel

totuși argumentația lui mă convinge. De ce? Bazîndu-se tot pe acest bun-simț l-a combătut și Aristotel pe Zenon, considerîndu-i paradoxul drept un paralogism[1]. Unde-i adevărul?

— Adevărul se va lămuri de-abia înspre sfîrșitul veacului al XIX-lea, după ce vor apărea lucrările lui Dedekind și Cantor — Georg, nu Moritz cel care a scris cele 4 volume de istorie a matematicii! — Prin lucrările lor și ale altora se vor lămuri multe probleme legate de mulțimile infinite și se va preciza modul lor de comportare, desigur altul decît acela al mulțimilor finite. Neținînd seamă de aceste fapte se ajunge, în mod cert, la paradoxuri. Aristotel nu cunoștea

[1] *Para*: contra, pe lîngă și *logos*: raționament; așadar un raționament fals.

aceste lucruri, dar a bănuit ceva, fiindcă se temea de infinit și chiar îi sfătuia pe matematicieni să se ferească de el.

— Însă Aristotel recunoaște existența infinitului. Undeva chiar spune că dacă n-ar exista infinitul, nici numerele nu ar fi infinite și timpul ar avea un început și un sfîrșit! Și, îmi aduc vag aminte, — de altfel nici n-am înțeles vreodată prea bine acestea, — că el privește infinitul din două puncte de vedere. Cum și în ce scop?

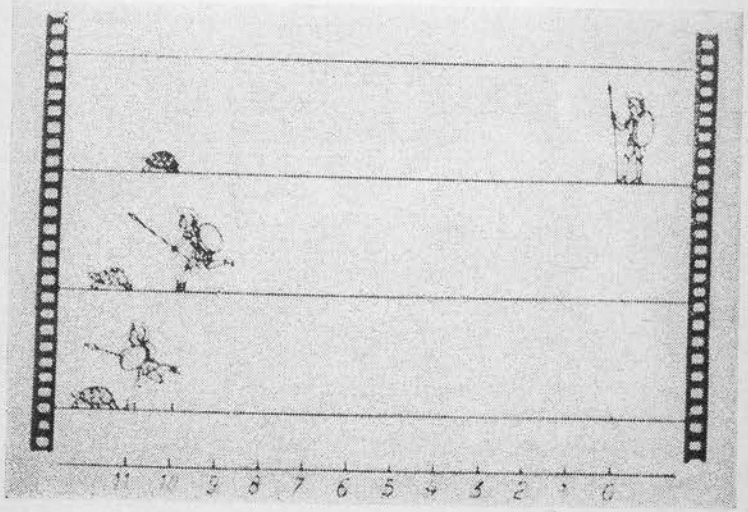
— Ca să-l elimine mai ușor din discuție! Aristotel atribuia infinitului calitatea de *potențialitate* și nu de *actualitate*. Cu alte cuvinte, el considera, ca și Jules Tannery, că infinitul este o mărime ce devine din ce în ce mai mare sau din ce în ce mai mică, dar se ferea să-l considere în act, adică în întregimea lui. E ca și cum ai privi Pămîntul de pe Pămînt și nu ridicîndu-te, așa cum au făcut-o cosmonauții, pînă la Lună, ca să-ți apară de acolo, în totalitatea lui, ca o minge. Ca să se facă mai bine înțeles, Aristotel recurge și la o imagine plastică: „despre un bloc de marmură, spune el, se poate afirma că *este o statuie în potențialitate*, pentru că va deveni cîndva o statuie, pe cînd *ceva infinit în potențialitate* nu este permis să se considere că va deveni *infinit în act!*" Și acum, cred că ne putem întoarce la segmentul lui Zenon. El are o lungime finită, să o numim „a". Această *lungime finită* poate fi descompusă într-o mulțime infinită de segmente: $\frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \frac{a}{2^3} + \ldots \frac{a}{2^n} + \ldots$ Deși termenii sumei sînt în număr infinit, suma există și este egală cu „a". Așadar, acest segment de lungime finită poate fi considerat ca „un infinit în potențialitate" și deci poate fi parcurs de un mobil într-un timp finit. Dar, dacă fac abstracție de existența segmentului finit și consider numai *mulțimea infinită ca atare*, adică mă refer *la infinitul actual*, în nemărginirea lui, atunci nici un mobil nu-l va putea străbate într-un timp finit, eu fiind obligat să-i urmăresc toate deplasările sale pe fiecare dintre aceste segmente, infinite ca număr.

— Atunci totul e lămurit, mă mir că paradoxul a mai dăinuit. Se pare că e în adevăr un paralogism!

— Nu! Matematicienii nu au arătat atîta ascultare ca tine. În infinitul actual există o realitate cu tendința de a se manifesta ca ceva întreg și mărginit, și matematicienii au vrut să-l cunoască mai îndeaproape. Ca și Adam, ei au cutezat să muște din măr, chiar cu prețul izgonirii din Rai.

— Stai pe loc. Să terminăm întîi cu Zenon și pe urmă urcăm la Rai. În al doilea paradox nu mai apare un singur element, ci două elemente în mișcare: Achile și broasca țestoasă. Achile cel iute de picior nu poate ajunge broasca țestoasă care avea un avans de 100 de pași, cînd a început întrecerea. Zenon arată că deși Achile aleargă de 100 de ori mai iute ca broasca, atunci cînd el a făcut cei 100 de pași și broasca a făcut un pas, apoi, în timp ce Achile face acest pas, broasca face $\frac{1}{100}$ din pas și așa mai departe. Admițînd că dreapta se divide la infinit, va rămîne mereu un spațiu de netrecut între broască și el. Am impresia că acest paradox este o variantă a primului. Nu înțeleg de ce l-a mai enunțat?

Achile și broasca țestoasă



— Fiindcă, așa cum ai remarcat tu însuți, aici e vorba de două mobile. Zenon insistă asupra faptului că nu numai mișcarea absolută nu-i posibilă, dar nici mișcarea relativă (a unui mobil față de un altul tot în mișcare). Era necesară această precizare și vei vedea-o reluată și în celelalte două paradoxuri, despre care aștept să-mi vorbești.

— Am să o fac îndată, fiindcă acum am înțeles mecanismul acestui paradox. Nu-i așa că, și în acest exemplu numai numărul segmentelor parcurse de broască $\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \ldots$ este infinit, pe cînd suma lor este finită și face exact $\frac{1}{99}$ dintr-un pas al lui Achile? Uite, controlează-mi calculul: $\frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1}{99}$.

— Exact. Vreau să-ți precizez că în aceste două exemple Zenon combate *posibilitatea de împărțire nelimitată a spațiului și timpului*, amintindu-ți că ipoteza continuității spațiului și a timpului (și deci posibilitatea de a fi împărțite la infinit) era susținută de școala lui Aristotel. Din contra, pitagoricienii considerau că numărul (întreg) stă la baza tuturor fenomenelor și prin urmare spațiul și timpul trebuie privite ca formate din puncte și clipe, adică din unități indivizibile. Celelalte două paradoxuri combat ceastălaltă concepție și pe baza ei Zenon susține atît imposibilitatea mișcării absolute, cît și a celei relative.

— Atunci lucrurile încep să mi se clarifice. În cazul săgeții care, deși e azvîrlită din arc, nu zboară ci stă pe loc, Zenon arată că aceasta se întîmplă pentru că o clipă săgeata se află într-un spațiu egal cu el însuși și deci, în clipa aceea, săgeata este în repaus. Dar, de acolo ea nu se mai poate mișca deoarece clipa este indivizibilă! În locul săgeții, în cel de al patrulea paradox, Zenon consideră serii de corpuri egale ca mărime și număr, așezate față în față, deplasîndu-se cu aceeași viteză și în sensuri opuse. Imaginea

ar putea fi asemuită cu două echipe de sportivi, așezate în monom, una în fața celeilalte, gata să alerge pe un stadion. Din cauza aceasta paradoxul a și căpătat numele de Stadion. Ca să fiu mai clar, să figurez aceste echipe. În prima linie pe care am să o notez cu (0), fixez poziția inițială a celor două echipe, înainte de a începe alergarea. În celelalte două, figurez echipele după ce s-a început alergarea, fiecare echipă depășind poziția inițială numai cu un singur loc, prima la stînga și a doua la dreapta:

(0): a_0, b_0, c_0, d_0...

(1): a_1, b_1, c_1, d_1...

(2): a_2, b_2, c_2, d_2...

În prima echipă b_1 se află sub a_0 și la fel c_1 sub b_0 etc. Așadar, fiecare alergător a înaintat cu un loc față de poziția inițială. În a doua echipă, însă, a_2 se află sub c_1, b_2 sub d_1 etc. Deci fiecare alergător din această echipă a înaintat cu două *locuri* în loc de unul, față de partenerii din prima echipă. Dar pentru a trece peste două locuri e necesar să se cheltuiască un timp dublu și totuși ambele echipe pun același timp ca să revină la poziția inițială! De aici rezultă contradicția și deci imposibilitatea mișcării: dublul timpului este egal cu jumătatea lui, adică presupusa clipă indivizibilă a fost împărțită în două! Ei, acum explică-mi și mie care a fost intenția lui Zenon, formulînd aceste paradoxuri? Cu ce scop?

— Vezi, îmi ceri prea mult. Nici pînă azi matematicienii și logicienii nu au lămurit cu ce scop anume a inventat Zenon paradoxurile sale. Unii sînt de părere că el a intenționat să-i combată pe pitagoricieni. În privința aceasta aș vrea să-ți recomand o carte foarte interesantă, pe care am citit-o mai demult, scrisă de Hans Hahn[1] în care se discută, printre altele, și problema, veche dar veșnic nouă, a cunoașterii Universului. El insistă acolo asupra problemei despre natura celor două surse de informație: I) experiența și

[1] Hans Hahn: Logique, mathématique etc., 1935.

observația, 2) gîndirea, ambele la fel de necesare în procesul cunoașterii. De pildă, legile reflexiei sau ale refracției pot fi observate direct și stabilite prin experiență, pe cînd orbita Lunii trebuie găsită pe cale teoretică, deci prin gîndire. La fel, un măr îl cîntărești direct, dar Luna sau Pămîntul le cîntărești pe cale teoretică, folosind gîndirea. Mai mult, fiindcă gîndirea a fost aceea care a corectat iluziile provocate de simțuri, aceasta a făcut pe unii filozofi să-și formuleze rezerve față de rezultatele obținute pe cale experimentală. Dar despre iluziile provocate de gîndire nu s-ar putea discuta? Ei bine, n-ar fi exclus ca Zenon să fi avut tocmai această intenție și de aceea să fi căutat argumente cu care să combată cele două curente de atunci ale gîndirii matematice, ambele la fel de puternice. Dar ar putea fi și altfel! De pildă, unii filozofi moderni sînt de părere că Zenon a intenționat să atragă atenția asupra contradicțiilor interne ce se află în noțiunile matematice de spațiu, timp, continuitate și mișcare! Singurul fapt cert este că prin aporiile[1] sale, Zenon a precizat, dacă nu cumva a pus chiar, bazele gîndirii dialectice în general și în matematici în particular, exercitînd o influență asupra dezvoltării ulterioare a matematicii grecești. Căci, după cum intenționam să-ți spun mai înainte, atunci cînd m-ai întrerupt, chiar din vremea lui Aristotel, matematicienii n-au ținut seama de avertismentul său cu privire la izgonirea infinitului actual din speculațiile teoretice! Proclus, comentator al *Elementelor* lui Euclid, și unul dintre ultimii reprezentanți ai școlii matematice din Atena (a trăit prin veacul al V-lea), relatează următorul paradox: dacă un diametru dă naștere la două semicercuri și dacă se duc din centrul cercului o infinitate de diametre, atunci se obțin de două ori mai multe semicercuri decît diametre. Proclus încearcă să explice această pluralitate a infinitului imitînd raționamentul lui Aristotel. N-a fost, desigur, nici el prea convingător. Și Galileu, în *Dialoguri despre știința nouă*, dezbate această problemă făcîndu-l pe Sagredo să se întrebe îngrijorat, cum se poate

[1] *Aporie*: dificultate, logic fără ieșire.

explica faptul că mulțimea numerelor care sînt patrate perfecte: 0, 1, 4, 9, 16,... deși reprezintă numai o parte din mulțimea numerelor naturale, este și ea infinită? La aceasta Salviati răspunde că, după părerea lui, atributele: *egal*, *mai mare* sau *mai mic* nu sînt aplicabile mulțimilor infinite, ci numai acelora finite.

— În aceeași ordine de idei, drept să-ți spun că-mi pare paradoxal faptul că două cercuri concentrice sînt formate din mulțimi egale de puncte. Faptul se stabilește foarte ușor dacă duc razele, totuși, pentru că cercul exterior poate fi oricît de mare față de cel interior, el ar trebui să aibă infinit mai multe puncte!

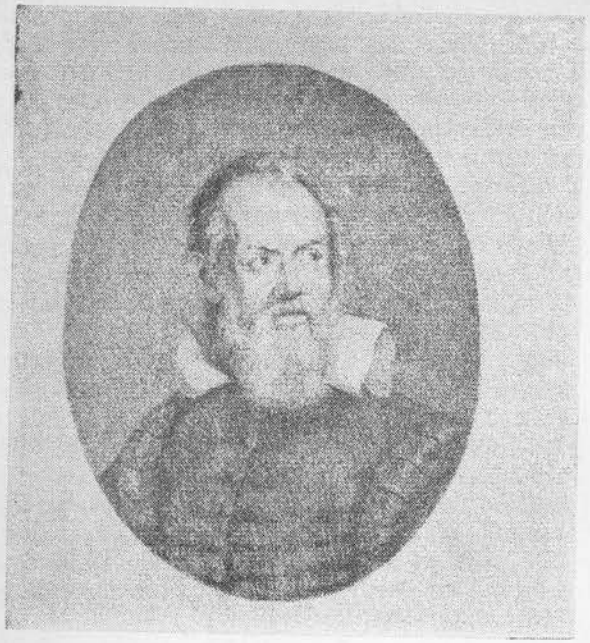
— Acest paradox și multe altele în care apare infinitul actual au frămîntat pe marii matematicieni din veacul al XVIII-lea și al XIX-lea. În prima jumătate a veacului al XIX-lea, Gauss scria unui prieten, arătîndu-i îngrijorarea sa față de încercările de a se introduce în raționamentele matematice *infinitul*, alături de mărimea finită: „Infinitul este numai un fel de a vorbi" spunea el și, după cîte îmi amintesc, adăuga că nu va fi pericol de nici o contradicție atîta vreme cît omul finit nu va face greșeala să privească infinitul ca pe ceva limitat!

— Așadar, avertismentul lui Aristotel, repetat peste cîtă vreme?

— Peste 300 + 1800 de ani; cam 21 sau 22 de veacuri. Ai fi tentat să spui că în acest interval totul a rămas pe loc! Și totuși, cîtă diferență între cunoștințele matematice dintre extremitățile lui. Însă scrisoarea lui Gauss nu a cunoscut-o atunci nimeni, în afară de acela căruia îi fusese adresată.

— Parcă, dacă ar fi fost cunoscută, s-ar fi schimbat ceva?

— Desigur că nu. Dovadă că după cîțiva ani apare, postum, cartea lui Bolzano: *Paradoxurile infinitului*, în care, după cum arată și titlul, sînt culese și prezentate în mod destul de amănunțit multe probleme de acest gen. Prin numeroase exemple el caută să evidențieze acea proprietate a mulțimii infinite, constatată și de Galileu, că o parte



Galileo Galilei

a ei este egală cu întregul[1] și o dovedește bazîndu-se pe corespondența, element cu element, între mulțimea infinită considerată și partea ei. În felul acesta, deși Bolzano nu stabilește o definiție a noțiunii infinit, el contribuie la înțelegerea conținutului acestei noțiuni.

— Vrei să spui că se poate da o definiție, propriu-zisă, a mulțimii infinite?

— Da. A făcut-o Richard Dedekind, pornind tocmai de la ideile lui Bolzano: „Un sistem S este infinit dacă este de aceeași putere cu o parte proprie a sa. În caz contrar, S este un sistem finit."

— Fantastică definiție! Așadar, iată că *omul finit*, cum îl caracterizează Gauss, deapănă infinitul și-l face ghem!

[1] Azi se folosește termenul de „mulțimi cu aceeași putere".

Știi că în această nemaipomenită îndrăzneală, eu văd semnele prevestitoare zborului cosmic? Omului finit nu-i mai ajunge planeta pe care trăiește, e însetat de spațiu infinit, vrea să contemple Pămîntul de pe Lună și, dacă se va putea, de mai de departe încă!

Ascultă:

„Secunda-ntrece veacul și timpul se-ncovoaie
Pe-o sfoară cît e firul de păr și se agață
Vecia, nesfîrșitul, pe un crîmpei de ață.
Se-nalță slabul, omul, pe aripi în tării
Și-aduce pe acolo noi legi și mărturii!"[1]

Spune-mi, cine ar fi putut exprima mai bine cele ce am auzit, decît Arghezi în aceste versuri?

— Tot Arghezi, în următoarele versuri, adresate omului:

„Și cumpănit pe cîte o talpă și-un călcîi
Ai fost pe verticala înaltă cel dintîi.
Îți ridicaseși capul de jos, chemat de soare,
Și începu îndată și cugetul să-ți zboare.
Tu ți-ai învins pămîntul, mormîntul și destinul."[2]

— Atunci sîntem chit! Spune-mi ce s-a întîmplat după ce „slabul, omul" a definit infinitul!

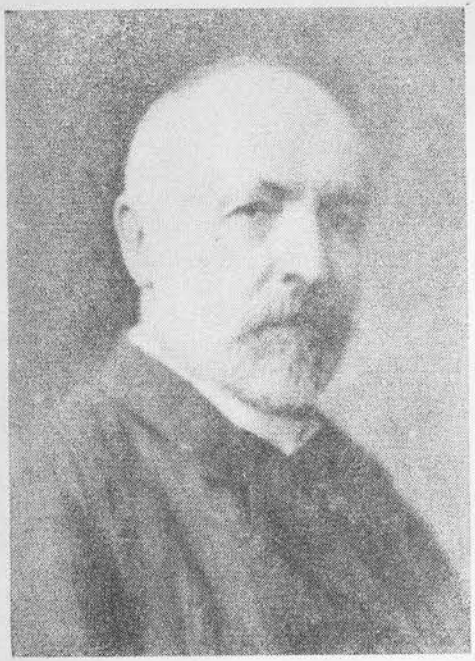
— Au urmat cercetările proprietăților mulțimilor infinite de către Georg Cantor care, independent de Dedekind, fusese și el atras, mai de demult, de aceste probleme. Articolul publicat de Cantor, asupra mulțimilor infinite, a apărut pentru unii ca un manifest revoluționar, pentru alții, ca opera unui nebun. Interesant este că și unii și alții, nu erau departe de adevăr!

— Cred și eu, omul de rînd va atribui unui nebun toate încercările de a-l muta din bîrlogul său!

— În cazul de față, însă, s-a întîmplat ca Georg Cantor să manifeste în adevăr accese de demență, și el însuși a remarcat că spiritul lui devenea extrem de lucid cînd revenea

[1] T. Arghezi: *Cîntare omului*: *Cel ce gîndește singur*.

[2] Idem: *Cîntare omului*: *Pînă atunci*.



Georg Cantor

dintr-un atare atac. În acele perioade intermitente de liniștire a dezvoltat el cele mai abstracte părți din teoria mulțimilor, astăzi capitol de bază în matematica modernă. În acest prim articol, Cantor stabilea două rezultate capitale pentru mulțimile infinite. Ușor de urmărit și de înțeles, dacă mă ajuți și tu.

— N-am decît această dorință. Spune-mi ce dorești?

— Să ne fixăm asupra mulțimilor finite de elemente. Admițînd că e vorba de mulțimea primelor 11 numere pare, te rog să-mi numești un element care aparține mulțimii și un altul care nu aparține.

— 2, 6, 18, 20 aparțin mulțimii iar dacă nu-l socotesc și pe zero ca făcînd parte din mulțime, atunci intră și 22, dar nu 24 nici 1, 7, 9! Ești mulțumit?

— Da. Acuma spune-mi ce semnificație are, în acest caz, pentru tine numărul „11"?

— El este numărul elementelor din mulțime și dacă vrei, el este acela care proiectează, în mintea mea, mulțimea considerată.

— Cantor numea acest număr, prin care se exprima totalitatea elementelor dintr-o mulțime finită, „număr cardinal" sau „puterea" mulțimii.

— Noțiunea de *număr cardinal* o cunosc din școală; desigur că 11 este un număr *cardinal* pe cînd al unsprezecelea este un *număr ordinal*, acesta din urmă arătîndu-mi ordinea. De pildă numărul 20 este al 10-lea număr din mulțimea despre care vorbim! Dar, despre *putere*, n-am mai auzit pînă acum.

— Reținem dar că, în cazul mulțimilor finite, *puterea mulțimii* coincide cu *numărul cardinal* care stabilește din cîte elemente e formată mulțimea.

Să numim încă echivalente mulțimile care au aceeași putere și admite că ai în fața ta două mulțimi de acest fel. Cum poți stabili echivalența lor?

— Nimic mai simplu! N-am decît să văd dacă pot împerechea, unul cu altul, elementele din cele două mulțimi. Dacă nu rămîne nici un element stingher, zic că cele două mulțimi sînt echivalente și deci au același număr cardinal!

— Stai! În felul acesta amesteci operațiile! În prima operație despre care mi-ai vorbit ai aplicat principiul corespondenței biunivoce — element cu element — și nu le-ai numărat. Așadar, nu știi nimic despre numărul lor cardinal. Iar cînd te referi la numerele cardinale, principiul corespondenței biunivoce nu mai are de ce fi amestecat! În acest caz, tu ai numărat, pur și simplu, elementele dintr-o mulțime, apoi ai repetat operația cu elementele din cealaltă mulțime și ai constatat că ai găsit același număr cardinal!

— Ei! Bătaie de apă în piuă! Rezultatul meu este același fie că le număr, fie că stabilesc corespondența elementelor...

— În cazul mulțimilor finite, dar nu și în cazul acelora infinite! Pe acelea cum le numeri? Or, tocmai aici intervine

ideea genială a lui Georg Cantor. El a creat un simbol care să reprezinte puterea mulțimii infinite a numerelor întregi și l-a notat cu prima literă a alfabetului ebraic: *alef*, urmată de indicele zero ($\aleph_0$). Alef zero este puterea mulțimii infinite a numerelor întregi, deci este și numărul ei cardinal.

— Asta-i drept nebunie! Cine-i acest număr? Cînd spun 10 sau 1739 sau 9 854 263 sau oricare alt număr vreau, știu despre ce vorbesc, cunosc aceste numere și le pot deosebi de oricare altele, dar alef zero...?

— Nu-i chiar așa! Îți închipui numai că le cunoști și că le poți deosebi! Admite că pun în fața ta două grămezi de nuci, una avînd 133 de nuci, alta 134. Oare crezi că privindu-le, ai să poți deosebi pe cea mai mare de cealaltă? Recunoaște că nu! Și acum să iau chiar numărul tău, cel mai mare: 9 854 263. L-ai format așa la întîmplare, dar cum ți-l reprezinți tu în minte? Altfel decît prin aceste cifre? Îl vezi? Îți spune ceva deosebit, ție nematematician (căci unui îndrăgit de cifre i-ar putea șopti multe particularități de ale lui), — uite despre acestea aș vrea să stăm cîndva de vorbă, să-ți spun povestea lui Ramanuyan de pildă... dar nu acum. Acum...

— Nu sînt de părerea ta. Cu acest număr, chiar dacă nu-mi spune nimic deosebit, eu pot opera, îl pot aduna cu altul, îl pot împărți sau înmulți, dar cu alef zero ce pot face? Ce fel de întreg este el?

— Întreg? Dar nici vorbă nu-i să fie întreg! Dacă ar fi întreg, oricît de mare, înseamnă că ar fi un număr finit, dar acesta e de altă natură decît numerele întregi, adică finite, fiindcă le depășește. Alef zero sare peste pragul finitului. El este un număr *transfinit* și fiind numărul cardinal al mulțimii infinite, este chiar *infinitul real*, *infinitul actual*, contra căruia a tunat și fulgerat Aristotel, Gauss și atîția și atîția alți matematicieni de seamă.

— Mare dreptate au mai avut! Cum vrei să împac, în mintea mea, faptul că prin alef zero număr toată mulțimea infinită a numerelor întregi, cînd îmi spui că după ce am făcut numărătoarea, nu găsesc un număr întreg? Ce aflu? Un număr fracționar sau un număr irațional?

— Nu, un cu totul altfel de număr decît acelea finite, oricare ar fi forma lor, găsești un număr *transfinit*! Privește-l deocamdată ca pe un simbol, așa după cum π este simbolul prin care reprezint raportul dintre lungimea unui cerc și diametrul său.

— Bine, am să-ți fac acest hatîr, ca să văd unde vrei să ajungi!

— Nu bănuiești? Te iau în spate și, iată-ne dincolo de bariera finitului... Avem în față două mulțimi infinite, să zicem mulțimea numerelor întregi și mulțimea numerelor pare, adică în realitate numai o parte sau o submulțime a mulțimii numerelor întregi. Să stabilim care este puterea acestei submulțimi. De numărat nu mai putem număra, așa că rămîne numai metoda corespondenței, element cu element.

— Știu unde vrei să ajungi. Mulțimile acestea sînt echivalente, fiindcă pot realiza corespondența element cu element, punîndu-le unele sub altele:

1, 2, 3, 4, 5 ...

2, 4, 6, 8, 10 ...

Ba mai mult, tot așa stabilesc că și submulțimea numerelor impare este echivalentă cu aceea a numerelor întregi, sau chiar și cu mulțimea patratelor numerelor întregi:

1, 4, 9, 16 ...

— Aceeași proprietate o are orice mulțime infinită, în care elementele ei se pot ordona în așa fel ca să fie în corespondență cu acelea din șirul numerelor naturale 1, 2, 3... Cantor a numit asemenea mulțimi *mulțimi numărabile*. Toate au aceeași putere: alef zero!

— E adevărat că rezultatul, prin fantasticul lui, este extraordinar de frumos. Dar Cantor întărește și definiția dată de Dedekind: „O mulțime este infinită dacă o parte a ei este asemenea cu ea întreagă"! Aș putea spune: partea este parte integrantă a ei însăși!

— Exact așa. Și dacă vrei să mai zăbovim prin acest ținut, vom face și puțină aritmetică. Să vedem cît face $\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0$.

— Înseamnă că se dau trei mulțimi numărabile. Bănuiesc că, după cele spuse acum, acestea se vor constitui ca părți ale unei singure mulțimi. Dar cum?

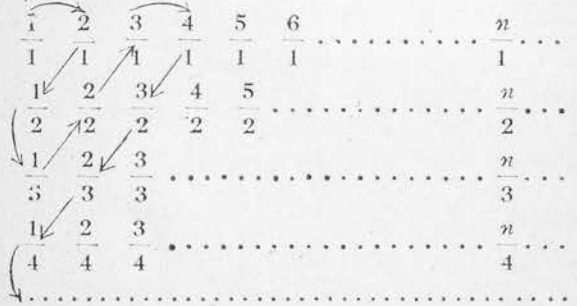
— Uite cum: fie $(a_0, a_1, a_2, \ldots a_n \ldots) + (b_0, b_1, b_2, \ldots b_n \ldots) + (c_0, c_1, c_2 \ldots c_n \ldots)$. Le voi grupa începînd cu primul element din fiecare mulțime, apoi al doilea, al treilea, adică am să scriu $(a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, \ldots a_n, b_n, c_n \ldots)$.

— În adevăr, așa ai reușit să le pui într-un singur șir, adică să formezi o singură mulțime numărabilă și deci dacă dincolo, la noi acasă, $1 + 1 + 1 = 3$, aici $\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

— Ba am să-ți arăt ceva și mai fantastic! Am să adun o *mulțime infinită* de mulțimi numărabile.

— Acuma nu mă mai sperii! Prin generalizare, știu că vei obține un altfel de alef!

— Ba cred că ai să te sperii, și încă rău de tot! Obțin același alef zero! Ca să te conving, am să consider mulțimea numerelor raționale. Ea este formată dintr-o infinitate de șiruri infinite de fracții, pe care ca să ți le aduc în față, am să le scriu aici, punînd în fiecare rînd numai fracțiile cu același numitor:



După cum vezi, așa nu se pierde nici o fracție, iar tabloul pe care l-am format este un patrat deschis la dreapta și în jos. Și acum să transformăm tabloul într-un șir, cu alte cu-

vinte, într-o mulțime numărabilă. Aceasta se poate face în mai multe feluri. Iată unul dintre procedee: Încep de la primul număr rațional $\frac{1}{1}$ și trec la al doilea $\frac{2}{1}$ după care mă cobor pe diagonală la $\frac{1}{2}$ continuînd să cobor la $\frac{1}{3}$ și apoi să urc pe diagonală pînă la $\frac{3}{1}$ de unde trec la $\frac{4}{1}$ și iar cobor pe diagonală pînă la $\frac{1}{4}$. Formez astfel șirul pe care-l pot numerota cu 1, 2, 3,...:

$$\frac{1}{1}\ \frac{2}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{1}\ \frac{4}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{2}{4} \ldots$$

— Așadar, o mulțime infinită de mulțimi infinite numărabile formează o mulțime numărabilă și are aceeași putere alef zero?

— Da. Ai aflat astfel că mulțimea fracțiilor $\frac{p}{q}$ (p și q numere întregi) deși infinit mai numeroasă decît mulțimea numerelor întregi, este echivalentă cu ea, fiind ca și ca, numărabilă.

— Admit că cele ce am aflat acum îmi taie răsuflarea. Exact ca răsăritul soarelui de azi dimineață. Mă întreb numai, la ce cabană ai putea să mă mai duci acum, ca să mă încălzesc, căci parcă și mintea mi-a înghețat!

— Cui cu cui se scoate. Hai la izvorul cel rece, să bem puțină apă de aceea care-ți îngheață buzele și creierul. Și mie mi-au cam amorțit oasele aici la masă. De altfel cred că ar fi și timpul să ne pregătim de întoarcere!

— Unde? am întrebat fără să mă gîndesc. De-abia după ce am auzit cuvîntul ce-l rostisem mi-am amintit de Cîmpulung, de vacanța care fuge, de reîntoarcerea la Iași.

Prietenul meu a înțeles tragedia care se petrecea în mine și a prins a rîde:

— De ce-ți pare rău? Nu vezi că-i mai bine acolo jos? Infinitul îi bun de sorbit cu linguriță. Așa dintr-o dată... te îngheață!

Da, mi-am zis, era mai cuminte să ne pregătim de coborît. Ziua era senină și nu mult după această discuție ne-am luat rămas bun și de la Pietrele Doamnei.

De-abia la primul popas am cerut cîteva lămuriri:

— Cred că dacă ai oarecare abilitate poți transforma orice mulțime de mulțimi infinite într-o mulțime numărabilă și ajungi așa mereu la același alef zero. Nu înțeleg de ce a mai avut nevoie Cantor de indicele zero, odată ce ai mereu de-afface cu același alef zero?

— În întrebarea ta s-au strecurat o mulțime de inexactități, pe care trebuie să le îndrept înainte de a-ți răspunde, mi-a spus Teodor Solonar. Mai întîi mi se pare că pentru tine o mulțime infinită este și numărabilă?

— De ce nu? Așez elementele într-o anumită ordine și le numerotez: primul a_1, al doilea a_2, și așa mai departe.

— Ei vezi? Aicea-i aici! Dacă orice mulțime finită se poate număra, nu toate mulțimile infinite sînt numărabile.

În articolul despre care ți-am vorbit, Cantor stabilește două rezultate surprinzătoare: primul că mulțimea numerelor algebrice este numărabilă și al doilea că mulțimea numerelor reale nu este numărabilă. Dar să-ți spun mai întîi ce se înțelege prin număr algebric, deși poate că ai ghicit. Este algebric un număr care verifică o ecuație algebrică de gradul n întreg, cu coeficienți întregi. De pildă, rădăcinile ecuației: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots \ldots + a_n = 0$, în care a_0, a_1,... a_n și n sînt numere întregi și se numesc numere algebrice. Mulțimea numerelor algebrice este cu mult mai numeroasă decît aceea a numerelor raționale, pe care o cuprinde ca pe o parte a ei — fiindcă aceasta din urmă este formată numai din rădăcinile ecuațiilor algebrice de gradul întîi: $a_0x + a_1 = 0$, cu a_0 și a_1 numere întregi. Totuși Cantor a găsit posibilitatea de a pune numerele algebrice în corespondență cu mulțimea numerelor întregi, de unde a dedus că această mulțime este numărabilă. Mulțimea numerelor reale este însă și mai densă. Ea cuprinde, pe lîngă numerele algebrice, toată infinitatea numerelor transcendente, printre care tu cunoști numărul π sau „e" baza sistemului de logaritmi neperieni. Or, această mulțime fiind

nenumărabilă, puterea ei se cere exprimată printr-un alt alef, să-i zicem alef unu și să-l considerăm număr transfinit de un ordin superior lui alef zero.

— Dragă bădie, înțeleg că o mulțime infinită este numărabilă și știu că o pot dovedi prin corespondența despre care tot vorbim, dar mi se pare absurd să dovedesc contrariul!

— Cam exagerat cuvîntul pentru o demonstrație așa de simplă și naturală. Uite, stai să desfac hîrtia aceasta de la pachetul de țigări ce se termină acum și am să-ți aștern pe ea o demonstrație de mai mare dragul:

Consider toate numerele reale dintre zero și unu și presupun, prin absurd, că această mulțime infinită este numărabilă. Așadar, să încep ordonarea lor:

$$0, a_{11}\ a_{12}\ a_{13} \ldots\ldots\ a_{1n}\ldots$$

$$0, a_{21}\ a_{22}\ a_{23} \ldots\ldots\ a_{2n}\ldots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$0, a_{p1}\ a_{p2}\ a_{p3} \ldots\ldots\ a_{pn}\ldots$$

Ai înțeles, cred, că am notat fiecare număr printr-o fracție zecimală infinită, iar ordinea în care le pun este stabilită de primul dintre cei doi indici. Așadar, numărul al 5-lea este $0,a_{51}\ a_{52}\ldots$, al doilea indice fiind acela care stabilește poziția uneia dintre cele 9 cifre din numărul respectiv. Ar însemna că în acest tablou trebuie să găsesc toate numerele dintre 0 și 1, dacă ele sînt numerotabile. Ori am să-ți arăt că cel puțin un număr nu se găsește printre ele, deși el există cu siguranță. Uite-l:

$$0, a_{1m}\ a_{2r}\ a_{3q} \ldots\ldots\ a_{ps}\ldots$$

Acest număr se deosebește de primul număr fiindcă în loc de a_{11} se află: a_{1m}, unde prin a_{1m} am notat oricare altă cifră din cele nouă în afară de a_{11}. La fel, el se deosebește de al doilea număr prin cifra a doua: a_{2r} în loc de a_{22} și așa mai departe. Ce ai să-mi obiectezi?

— Nimic. În cele ce-mi spui aflu tentație și gust de fruct oprit. Văd că adepții lui alef nu mai au ce căuta în Raiul numerelor finite.

— Nici truda de a se adapta noilor condiții nu a fost mai mică decît a primilor izgoniți. Chiar noțiunea însăși de mulțime nenumărabilă este zguduitoare, deoarece contrazice bunul simț. I-a revoltat pe mat-maticieni așa cum te-a revoltat și pe tine la început, fără însă să-i fi liniștit.

— Cum ai reușit să o faci tu, cu mine. De ce?

— Pentru că, după cum se știe de foarte multă vreme, mulțimea numerelor reale este în corespondență biunivocă cu mulțimea punctelor de pe orice dreaptă pe care s-a fixat o origine, un sens și o unitate de măsură.

— Știu. Fiind aleasă unitatea de măsură și sensul, oricărui segment astfel măsurat îi corespunde numărul care arată lungimea lui și invers, orice număr poate fi considerat ca lungime a unui anumit segment de pe dreaptă. Iată dar corespondența biunivocă între mulțimea numerelor reale și punctele dreptei.

— Da, și această corespondență ne-a obișnuit să credem că punctele de pe dreaptă se succed în ordine și dacă aleg un punct de pe ea, pot afirma cu siguranță despre un altul, de pe aceeași dreaptă, dacă se află la stînga sau la dreapta lui. Dar dacă mulțimea punctelor de pe dreaptă nu-i numărabilă, ceea ce părea indiscutabil devine o iluzie. Dar nu-i numai atît. Ai văzut că în aritmetica numerelor transfinite $a+a=a$, spre deosebire de rezultatul obișnuit $a+a=2a$. Dar dacă numărul transfinit este, cum presupunem, o prelungire, dincolo de infinit, a numărului finit, atunci aceste două rezultate, care deocamdată se contrazic, ar trebui puse de acord. Cum? Desigur că revăzînd și regîndind întregul conținut al aritmeticii, începînd chiar cu definiția numărului întreg. Și în adevăr, așa s-a procedat. Pe la sfîrșitul veacului trecut, Gottlob Frege, matematician și logician, bazîndu-se pe teoria mulțimilor stabilită de Cantor și alții, definește noțiunea de număr întreg natural. Îți amintești, cred, că două mulțimi infinite aveau, după Cantor, aceeași putere...

— Desigur! Aveau aceeași putere dacă se putea stabili o corespondență biunivocă între elementele lor. La fel ca și în cazul mulțimilor finite, unde, dacă se poate realiza corespondența biunivocă între elemente, atunci acele mulțimi au același număr cardinal!

— Ei bine, Frege cearcă să dea noțiunii de număr cardinal al unei mulțimi un înțeles mai precis decît acela pe care l-a dat Cantor și de aceea numește cardinalul unei mulțimi M, finită sau infinită, mulțimea tuturor mulțimilor avînd aceeași putere cu M.

— Dă-mi un exemplu, căci așa nu mai înțeleg nimic.

— Să considerăm mulțimea degetelor de la o mînă normală. Cu ajutorul ei pot pune în corespondență biunivocă alte mulțimi egale. Din toate aceste mulțimi se desprinde ca element comun lor noțiunea abstractă de mulțime a tuturor mulțimilor care, puse în corespondență biunivocă cu mulțimea degetelor de la o mînă normală, le epuizează pe toate. Această mulțime a tuturor mulțimilor, avînd aceeași putere cu mulțimea degetelor de la o mînă normală, definește numărul cardinal 5. Pe baza acestei definiții, Frege lucrează sistematic ani de zile, stabilind toate proprietățile numerelor întregi și publicîndu-și parțial rezultatele, înainte de a le închega în volum. Dar acum, încet, încet, hai spre casă că ne-am odihnit destul și pe drum îți voi spune ce i s-a întîmplat prietenului nostru Frege.

O bucată de drum am ascultat păsărelele, pe urmă am urmărit un șarpe care ne-a tăiat drumul, pierzîndu-se în desiș și, după ce a stins bine mucul de țigară ce a mocnit un timp în colțul gurii, Teodor Solonar a continuat:

— Trebuie să știi că nu numai Frege lucra în această direcție. La primul Congres Internațional al Matematicienilor care a avut loc la Zürich în 1897, teoria mulțimilor a fost unanim recunoscută ca avînd remarcabile aplicații în Analiza matematică. Independent de Frege, se ocupa cu aceeași problemă și Bertrand Russell. El a ajuns la aceeași definiție a numărului întreg, însă, spre deosebire de Frege, a observat că terenul pe care se sprijinea întreaga construcție

aluneca: noțiunea de mulțime a tuturor mulțimilor fiind paradoxală!

— Cum vine asta?

— Iată cum: o mulțime poate să se conțină pe ea ca element sau să nu se conțină. De exemplu: după definiția lui Frege numărul zero este mulțimea tuturor mulțimilor care nu cuprind nici un element. Așadar, mulțimea zero nu se cuprinde pe ea însăși ca element. Să considerăm însă mulțimea tuturor mulțimilor de noțiuni abstracte. Această mulțime este tot o noțiune abstractă, deci ea se cuprinde ca element al acestei mulțimi. Și acum iată paradoxul stabilit de Russell:

„Cum este mulțimea T a tuturor mulțimilor ce nu se cuprind ca element?"

1. Presupunem că T aparține mulțimii ca element al ei. Dar asta înseamnă, prin definiție, că T este una dintre mulțimile care nu se cuprind ca element.

2. Presupunem că T nu aparține mulțimii ca element al ei. Atunci T se conține ca element, fiind o mulțime ce nu se cuprinde ca element!

— Extraordinar! Dar acesta este chiar paradoxul lui Epimenide!

— Așa și-a spus și Russell cînd i-a scris lui Frege, arătîndu-i-l!

— Și Frege ce-a făcut?

— Ce să facă? Lucrarea sa era sub tipar și avea destule alte calități pentru care merita să fie tipărită. A tipărit-o adăugînd, pe ultima filă, ceva cam așa: „Nimic nu-i mai dureros pentru un om de știință decît să-și vadă temelia operei sale năruită, chiar în clipa cînd a considerat că a terminat-o"!

— Știi ce rău îmi pare!

— Dar de ce? În aceste înfrîngeri stă tocmai puterea și frumusețea matematicilor. E foarte adevărat că teoria mulțimilor a dus la o criză violentă care a zguduit din temelii lumea matematică multe decenii. Dar problemele care se puneau păreau atît de grandioase încît David Hilbert, unul dintre cei mai aprigi sprijinitori ai acestor probleme, a

spus: „Teoria lui Cantor îmi pare punctul cel mai admirabil al spiritului matematic. Nimeni nu ne va alunga din paradisul pe care Cantor l-a creat pentru noi". Vezi dar că, urmînd exemplul primilor oameni și matematicienii și-au creat un nou paradis, sau, mai bine zis, și-l creează mereu, fiindcă nu toți îl văd la fel și nici nu aleg aceleași mijloace de realizare. Numai că aceste probleme mă depășesc.

— Se poate. Mie mi-e de ajuns să știu că dacă te avînți în regiunile matematice stăpînite de mulțimile infinite, riști să te înfrunte un paradox.

— În privința asta, iar am să te contrazic. Riști să te înfrunte un paradox și în regiunile cu mulțimi finite! Află că tot Russell a stabilit și următorul paradox, de data aceasta legat de o mulțime finită de numere. Uite-l: consider mulțimea tuturor numerelor determinate prin mai puțin de 16 cuvinte. O asemenea mulțime este finită căci fiecare dintre numerele vizate necesită un număr finit de cuvinte ca să fie exprimat.

— Să-mi formez un exemplu: „Douăzeci și trei milioane patru sute de mii trei zeci", pînă aici am 11 cuvinte, mai am drept la 4: opt sute cinci zeci.

— Fie. Desigur că poți considera și un număr exprimat prin 5 cuvinte sau și de un singur cuvînt, toate aceste numere fac parte din grămada considerată. Acuma iată paradoxul: „Fie N cel mai mic număr întreg care nu poate fi definit prin cincisprezece cuvinte". Prin această propoziție am definit perfect un număr care face parte din mulțimea considerată, fiindcă el este definit prin exact 15 cuvinte. Dar, în același timp, se afirmă că acest număr nu poate fi definit prin 15 cuvinte!

— Lasă-mă în pace! Vrei să-ți rîzi de mine cu asemenea calambururi?

— Nu rîd deloc. Lucrurile sînt foarte serioase și stîrnesc multă bătaie de cap și neliniște. Altora. Ție, cred că nu! Nici mie! Ca dovadă, că n-am mai citit nimic demult în legătură cu această problemă, despre care ți-am spus tot ce am știut! Acum fac un plan, să lăsăm drumul marcat și să o luăm pe cărăruia asta, care taie mai de-a dreptul.

— Bine, sper că nu ai de gînd să ajungi iar la „Moara dracului", ca atunci cînd am rătăcit drumul! După atîtea paradoxuri, eu, drept să-ți spun, n-aș renunța așa de ușor la „drumul lung și cunoscut"! Mai ales că aș vrea să-mi notez, cînd vom ajunge acasă, vreo două-trei cărțulii, așa mai ușurele, cu Logică matematică, Teoria mulțimilor... Să nu-ți închipui că am de gînd să-mi bag capul sănătos sub Evanghelie, dar știi... așa de curiozitate...

PROBLEMA CELOR ȘAPTE PODURI DE PE PREGEL

sau

De la amuzament la topologie

— Cred că a venit vremea să-mi arăți problema cu care te făleai alaltăieri pe Rarău, i-am spus prietenului meu în ultima zi pe care o mai petreceam cu el, văzînd că el nu mai pomenește despre ea.

— Vremea a venit și a trecut, fiindcă socoteala din tîrg nu se potrivește cu cea de acasă!

— Asta-i de cînd lumea, dar mă rog, cine ți-a încurcat socotelile? Eu?

— Da'cine altul? Problema mea s-a ofilit ca o floare fără apă, tot așteptînd ca tu să-i faci introducerea!

— Niciodată n-ai fost așa de năzuros! De unde să știu că mi-ai pregătit o problemă care nu se poate discuta fără un anumit ceremonial! Poate chiar și într-o anumită ținută? Și care ar fi trebuit să fie INTRODUCEREA?

— La ce bun să o mai afli dacă labirintul din Hampton Court nu ți-a lăsat nici o impresie? Probabil că nici nu l-ai străbătut, de vreme ce nu mi-ai vorbit nimic despre el!

— Așa spune, bădie! Va să zică labirintul îi pricina! Ei bine da, am trecut pe lîngă el, dar dacă n-am avut destulă vreme nici ca să vizitez bine castelul, cum era să mă mai încumet să rătăcesc prin aleile lui? Dacă însă problema ta tînjește după atmosferă de labirint, atunci la ce să ne oprim la o imitație, construită, după cîte știu, prin veacul al XVII-lea,

și să nu mergem direct la sursă! Pliniu menționează în Istoria lui naturală că Amenembet al III-lea, cel din dinastia a 12-a, ar fi poruncit să se clădească primul labirint. Tot el ne informează că, după egipteni, cretanii sînt aceia care au construit un labirint, construcția fiind executată de Dedal, tot după un plan egiptean, rege fiind puternicul Minos. Acest labirint este de altfel acela care a intrat în legendă, din pricina Minotaurului, căruia îi plăcea să se hrănească numai cu carnea fragedă a frumoșilor tineri și tinere ateniene. Ca să compensez greșeala mea, am să-ți fac inima cît un purice descriindu-ți toate încercările prin care a trecut Tezeu pînă a ucis Minotaurul și pe urmă, am să te fac să pufnești de indignare cînd acest erou, drept recunoștință față de Ariadna care l-a ajutat să iasă din labirint dîndu-i ghemul de ață, după ce o ia cu el pe corabie, o părăsește pe o insulă pustie!

— Oprește-te, moară stricată!

— Nici nu mă gîndesc! Vreau să-ți creez condițiile optime în care să se poată desfășura problema ce mi-ai pregătit-o! Mai ales că știu ce mă așteaptă: dacă-i vorba de labirint, înseamnă geometrie, adică ai să-mi dai să calculez: „de cîte ori? ce lungime? ce suprafață"?

— Nicidecum! Nu te așteaptă nici un fel de calcule, deși problema este, într-adevăr, din domeniul geometriei!

— Labirint, geometrie și nici un calcul! Ghici ghicitoarea mea?

— Mă gîndeam să-ți dovedesc că poți străbate orice labirint fără firul Ariadnei și fără să-i cunoști dinainte planul!

— Atunci, las-o mai ieftin! Am spus bine „ghicitoare" sau hai să-i zicem „amuzament, divertisment ori recreație matematică", în orice caz nu Problemă de geometrie cu P mare! Înseamnă că vom dezlega împreună o șaradă, și îmi va face o deosebită plăcere, numai nu înțeleg de ce nu ai curajul să recunoști acest fapt! Să știi că mă bucură că ai și tu o dată gust de joacă și îți promit să te ascult cu aceeași seriozitate ca atunci cînd îmi arătai o problemă adevărată! Ba, ca să nu te mai sfiești să-i spui și tu, ca și mine, amuzament, lasă-mă să-ți citesc aceste cîteva rînduri copiate cîndva pentru tine, dar de care era să uit iar și ar fi rămas în portmoneu pînă cine

Leibniz

știe cînd. Ascultă-l pe marele Blaise Pascal: „Subiectele geometriei sînt în sinea lor așa de serioase, că n-ar strica să se găsească și unele ocazii pentru a le face mai amuzante"!

— Bine, dar...

— Lasă că n-am terminat. Ascultă-l și pe marele, neîntrecutul Leibniz, ce mărturisește într-o scrisoare, numai cu doi ani înainte de a muri: „Aș dori ca cineva iscusit în matematici și fizică să se ocupe de jocuri. Spiritul omenesc scînteiază în jocuri mai puternic decît în orice altceva." Poftim dezlegare de la acești mari înaintași... dar unde te duci și ce cauți?

— Ce caut, am găsit! Iată o completare la cele citite de tine, datorată lui Diderot: „Nu știu dacă este vreun raport între talentul unui jucător și geniul unui matematician, dar

există unul între joc și matematici. Lăsînd la o parte ceea ce întîmplarea pune ca nesiguranță pe de o parte sau, comparînd cu ceea ce abstracția pune ca neexactitate pe de altă parte, o partidă de joc poate fi considerată ca o suită nedeterminată de probleme ce se cer rezolvate, în condiții date. Nu există chestiune matematică căreia să nu-i convină aceeași definiție și obiectul matematicianului nu are în natură mai multă existență decît al jucătorului. De o parte și de alta e vorba de convenții."

— Bine, dar atunci, dacă sîntem de aceeași părere, de ce te încăpățînezi să afirmi că ai de gînd să-mi vorbești de geometrie? Îți spun drept că nu mai înțeleg nimic!

— În fine, ai spus și tu ceva la locul lui! Probabil că te-a luat gura pe dinainte! Așa că acceptă constatarea și lasă-mă să te fac să înțelegi că geometria se poate ocupa și de alte lucruri, în afară de paralele și perpendiculare, de ariile poligoanelor sau volumul poliedrelor. Că există o geometrie nemetrică, să-i zicem calitativă, dacă aceleia pe care o cunoști tu i-am zice metrică sau cantitativă, o geometrie a corpurilor care se deformează, într-un mediu care se deformează și el...

— Nu vezi că te contrazici? Dacă totul se deformează, cum vrei să mai găsești puncte de reper, pe baza cărora să se clădească ceva statornic, cum e geometria?

— De loc. Dacă privești mai atent, vei găsi și elemente de ordine în această dezordine, vei stabili permanențe în iureșul transformărilor! Ca să te convingi, înnoadă această sfoară, cap la cap. Așaz-o pe masă și deformeaz-o mereu, ca și cum ar fi suflată de vînt. Văd că ai făcut un cerc, l-ai prefăcut în triunghi, acuma parcă ar fi un trapez. Nu, nu o ridica de pe masă și nici nu o rupe. Cît timp o deformezi în mod continuu, orice figură ai să formezi, mie mi-e tot una. Pe toate le voi considera echivalente, deși nu seamănă una cualta și nu cuprind nici aceeași arie. Dacă vrei să folosim un termen mai pompos, să zicem că sînt „homeomorfe". Acum, te rog să lași deoparte faptul că aceste figuri homeomorfe nu seamănă între ele și să te gîndești la un element caracteristic lor, același în toate deformările, oricît de bizare ar fi ele (fig. 1).

— Știu eu? Poate că firul de sfoară apare ca o barieră care desparte punctele din interior de cele din exterior, dacă și asta mai poate fi numită proprietate!

— Desigur! Și ai judecat foarte bine. Hai, curaj, mai află și altceva permanent! Să zicem pe contur!

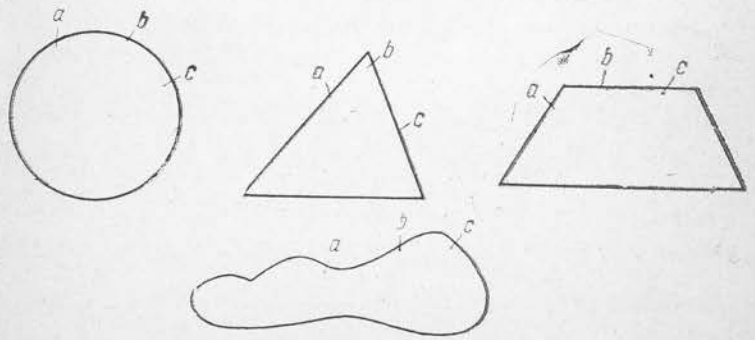
— Bine, dacă aș fixa 3 puncte a, b, c, așa fel încît b să se găsească între a și c, deformarea nu schimbă această configurație cîtă vreme nu tai sfoara și nici nu o răsucesc.

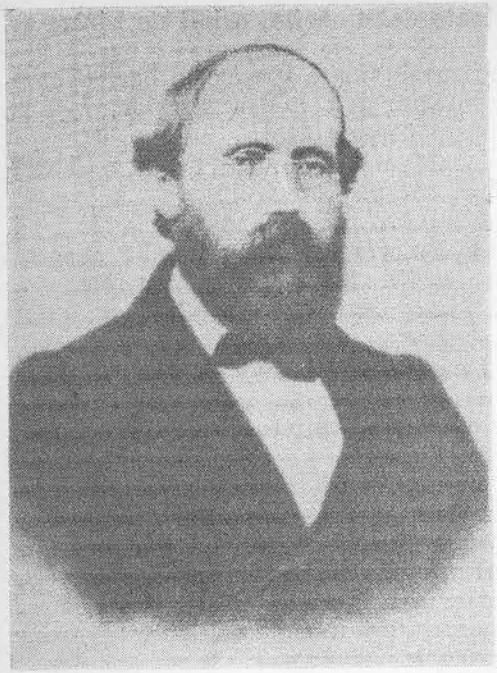
— Ești formidabil! Ți-am mai spus eu odată că ți-ai greșit cariera!

— Lasă-mă în pace! Doar n-ai de gînd să-mi spui că ai să construiești o geometrie, cu teoreme tot așa de impunătoare ca acelea care mi-au mîncat sufletul la școală, pornind de la aceste observații!

—Ba da. Ca să te încredințezi, iată la repezeală una stabilită de Riemann: „Două curbe plane închise se taie într-un număr pereche de puncte." Cred că n-ai nimic de obiectat: curbele pot fi oricum, dar dacă-s plane și închise, punctele lor de intersecție sînt 2, 4, 6, dar niciodată 1, 3, 5, ... O teoremă care se demonstrează exact după aceleași principii logice ca și teorema lui Pitagora!

Fig. 1





B. Riemann

— Bine, să zicem. Dar ce legătură poate exista între această teoremă și labirintul de la care am pornit?

— Exact aceea care există între cheia unei uși închise și broasca ei!

— Da, s-ar putea să ai dreptate, în cazul că aș compara drumurile care se încrucișează cu porțiunile de curbă, totuși... de aici la soluția pe care pretinzi să o găsești, „e-o cale-atît de lungă..."

— O scurtăm noi, nu te teme. Nu-i vorba de ani, cred că nici de un ceas!

Pentru aceasta rămîne să facem cîteva precizări și să stabilim terminologia. Dar mai întîi să aduc o carte cu planul labirintului din Hampton Court, în care îmi făceam cu

iluzia că ai să te rătăcești! (fig 2). Vezi, în punctul A este intrarea și dacă o pornești spre dreapta, cărarea se înfundă și nu poți trece mai departe, așa că te întorci de unde ai plecat și o apuci la stînga și mergi așa pînă în punctul B, unde se află o răspîntie. Aici sînt trei cărări: două dintre ele se blochează și una trece mai departe și te va duce după alte peripeții asemănătoare la centru, după care ai de străbătut drumul spre ieșire, după același tipic. Răspîntia fiind punctul unde se întîlnesc mai multe cărări, să-i zicem acestui punct *nod*. Un nod se deosebește de altul prin numărul cărărilor, — respectiv al liniilor — care ajung și pornesc din el. De pildă, N_3 este un nod triplu, N_4 este un nod de ordinul 4, N_5 de ordinul 5... (fig. 3).

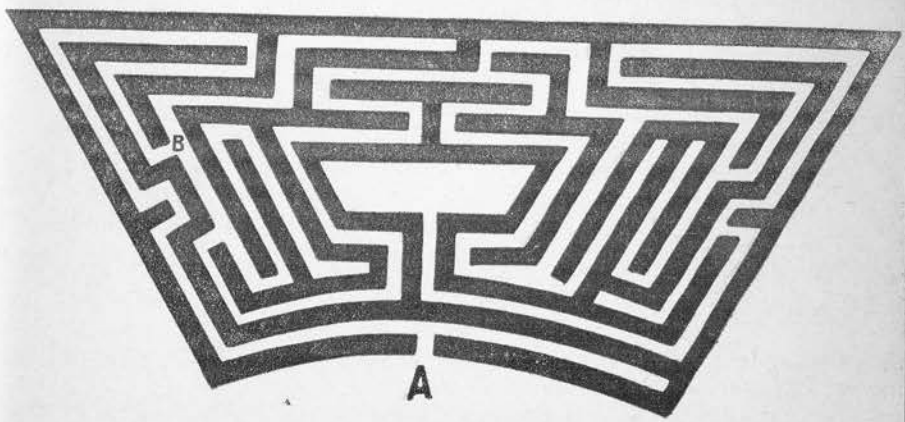
— Și de ce n-ai început cu un N_2?

— Pentru că nu există. Încearcă să-l desenezi tu!

— Iată-l: N_2 (fig. 4). Ai dreptate, aici nu-i vorba de o răspîntie, am ajuns în N_2 și merg mai departe pe singura cărare ce o am înaintea mea. Dar dacă ajung în N_1 nu am cărare ca să merg mai departe?

— Atunci punctul N_1 este un nod de ordinul întîi. I se mai zice și extremitate liberă. Acestea există cu adevărat în

Fig. 2



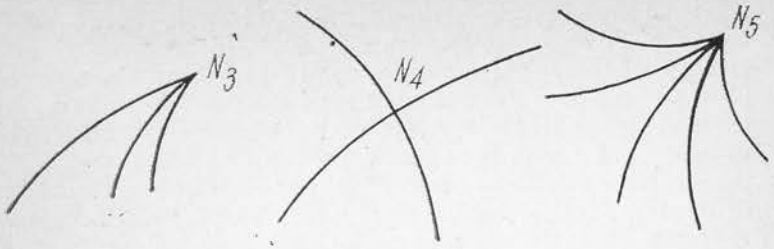


Fig. 3

orice labirint și deci trebuie să ținem seamă de ele, socotindu-le printre nodurile impare.

— Da, orice labirint are cel puțin două extremități libere: intrarea și centrul, abstracție făcînd de celelalte înfundături, pe cînd o curbă închisă nu are nici o extremitate liberă.

— Ai vorbit de o curbă închisă, eu am să-ți dau un termen mai general: un drum sau o rețea închisă. Înțeleg prin rețea închisă figura formată din mai multe linii, fiecare dintre ele străbătute în mod continuu și fără ca vreuna dintre ele să aibă o extremitate liberă. Desigur că orice drum închis se termină la punctul de plecare. Și acum o teoremă își așteaptă demonstrația: „Orice drum închis are un număr par de noduri impare."

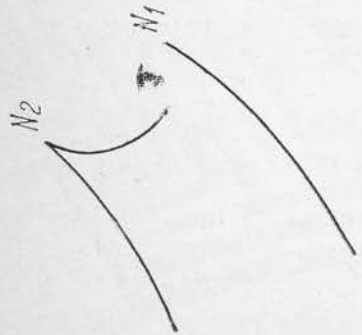


Fig. 4

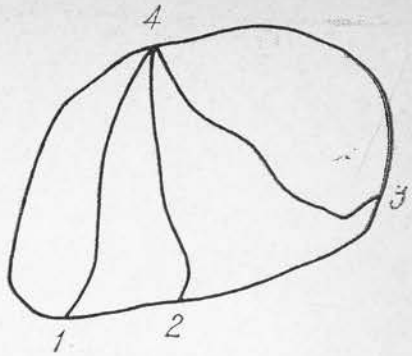


Fig. 5

— Stai să fac întîi o figură ca să mă lămuresc. De pildă aceasta (fig. 5), are 4 noduri și într-adevăr toate sînt impare, 3 de ordinul 3 și unul de ordinul 5. Dar cum să ajung la o demonstrație generală? Pe ce să mă bazez?

— Desigur că pe cele ce am stabilit mai adineauri. Fiind vorba de o rețea închisă, înseamnă că străbătînd „n" cărări, trebuie să revii de unde ai plecat.

— Bine. Noduri de ordinul 1 nu am. Fiecare cărare ajunge sau pornește dintr-un nod care poate fi de un ordin par sau impar, iar ordinul nodului îmi arată cîte cărări se despart din el. Dintr-un nod de ordinul 3 pornesc 3 cărări și dacă x este numărul de noduri de ordinul 3, atunci 3 x este numărul cărărilor care ajung sau pornesc din aceste noduri. Tot așa, numind y, z, t, numărul nodurilor de ordinul 4, 5, 6, etc., pot ști numărul cărărilor legate de aceste noduri: 4y, 5z, 6t, și așa mai departe.

— Ai judecat foarte bine.

— Pînă aici poate, dar mai departe nu mă mai duce mintea.

— Ți se pare, așa ești tu modest din fire! Gîndește-te la faptul că numărul cărărilor este n...

— Stai! O cărare pornește de la un nod și ajunge la alt nod, deci făcînd suma: $3x + 4y + 5z + 6t + \ldots$, fiecare cărare este socotită de două ori, așa că aș putea scrie:

$$3x + 4y + 5z + 6t + \ldots = 2n.$$

— De ce „ai putea" cînd poți scrie, fără nici o îndoială! Uite, nu-ți mai rămîne decît un fleac și teorema e demonstrată.

— Rîzi de mine? Teorema vorbește de numărul nodurilor impare, ori relația pe care am scris-o cuprinde de-a valma nodurile pare și impare...

— Dar în membrul al doilea este un număr par, ceea ce-ți permite să dai răvaș de drum tuturor nodurilor pare...

— Într-adevăr, dacă scad dintr-un număr par un număr par, paritatea lui rămîne. Pot scrie deci:

$$3x + 5z + \ldots = 2n.$$

Iar acum, în membrul întîi trebuie să am un număr par, ceea ce este imposibil dacă $(x + z + \ldots)$ nu este par fiindcă 3, 5,... sînt toate numere impare! Extraordinar, nu-mi vine a crede! Să știi că teorema e foarte frumoasă și nu-i chiar așa de simplă!

— Nu mai spune! Ia vezi, nu mai ai prin buzunare niște hîrtiuțe cu aforisme sau „cugetări" despre jocuri?

— În fine, ți-a venit și ție apa la moară!

— Da, dar moara mea nu-i stricată. Ca dovadă, o nouă teoremă: „O rețea fără noduri impare este închisă."

— Intuitiv, această teoremă pare evidentă, căci avînd un nod par, înseamnă că fiecare dintre cărările care pornesc din el are și o cărare de întors.

Pornind de la un nod par, pot străbate toate cărările posibile și, la urmă, îmi mai rămîne una pe care să mă întorc de unde am pornit, așadar să realizez o rețea închisă.

— Uite, dacă vrei, am să-ți arăt cîteva figuri clasice de asemenea rețele închise. Mai întîi pentagrama, vestita emblemă a pitagoricienilor (fig. 6), ca se poate desena printr-o trăsătură continuă.

— Da și are 5 noduri de ordinul patru.

— Apoi este pecetea lui Mahomed, formată din două semilune (fig. 7). Tocmai prin această posibilitate de a fi fost desenată pentru prima oară pe nisip de Mahomed, cu vîrful iataganului său, fără a-l ridica și fără a trece de două

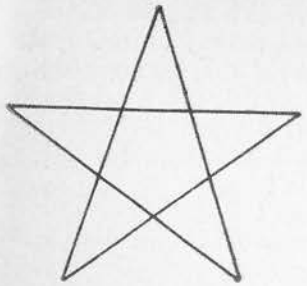


Fig. 6

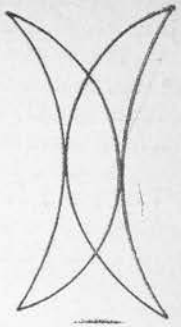


Fig. 7

ori peste o linie descrisă, a căpătat putere de simbol. Cîte noduri are?

— Te-am înțeles! Credeai că am să cad iar în ispită și am să număr cele 4 cornuri? Nu, dragul meu, sînt numai 4 noduri de ordinul 4!

— Ei, fiindcă nu ai greșit, am să te răsplătesc spunîndu-ți că orice poligon convex cu un număr impar de laturi, cu toate diagonalele lui, se poate desena printr-o singură trăsătură de condei, cu alte cuvinte figura este o rețea închisă.

— Nu te cred pînă nu verific! Să zicem că numărul laturilor este $2n + 1$. Din fiecare vîrf duc $(2n + 1 - 3) = 2n - 2$ diagonale și cu cele două laturi care pornesc din vîrful respectiv înseamnă $2n$. Ai dreptate, el are numai $2n$ noduri pare.

— De loc, dacă numeri, numără cumsecade! Alte noduri nu mai sînt? Hai să desenăm un heptagon (fig. 8). În acest caz $n = 3$. După socoteala de mai înainte, din fiecare vîrf pleacă 4 diagonale iar acestea vor întîlni diagonalele din celelalte vîrfuri...

— Ai dreptate. Mai sînt și alte noduri. Acelea însă sînt toate pare căci toate diagonalele își au extremitățile în vîrfurile poligonului.

— În drum spre Iași, te poți distra încercînd să-l desenezi dintr-o singură trăsătură de condei! Te asigur că așa vor trece stațiile fără să mai știi cînd! Acum hai să ne în-

toarcem la labirint, căci aceste două teoreme ne sînt deajuns ca să-i descoperim taina!

— Nu te supăra că am să te contrazic! Amîndouă teoremele se refereau la rețele închise și parcă, amîndoi, de comun acord, am stabilit că labirintul are, cu siguranță, două extremități libere: intrarea și centrul, adică cel puțin două noduri impare. Labirintul nu-i o rețea închisă!

— Ei și? N-avem decît să-l transformăm într-o rețea închisă! Spunem: hocus-pocus și gata!

— Lasă gluma, acuma-i lucru serios!

— Cum vine asta? Nu ai susținut tu că-i „un divertisment"? Fii consecvent, uite acuma am eu gust de joacă! Sau mai bine zis, nu eu, ci marele Euler! După ce a stabilit ultima teoremă, el a transformat toate nodurile unui labirint în noduri pare și așa a arătat că poate străbate fără frică orice labirint fără să recurgă la ghemul Ariadnei. Un simplu „hocus-pocus", nu? Vrei să ți-l spun?

— Dacă Euler ți-e chezaș, desigur!

— Ei uite, în loc să trec cîte o singură dată pe fiecare cărare, voi trece de două ori, o dată într-un sens și a doua

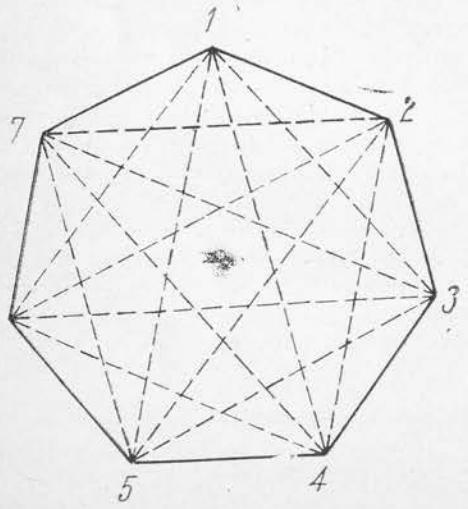


Fig. 8

oară în sens contrar, considerînd sau prefăcînd astfel cărările simple în duble.

— E cu adevărat un „hocus-pocus" fiindcă așa toate nodurile își dublează ordinul, adică devin toate pare! Teoretic, problema e rezolvată, dar practic, pe teren, cum procedez? De unde știu pe ce cărare am trecut și în ce sens?

— Întrebarea ta mă face să mă gîndesc la povestea lui Creangă: „Da, mueți-s posmagii"? N-ai decît să însemni cărările pe care treci, indicînd și sensul în care le străbați. Astfel, să presupunem că începi făcînd un semn pe partea dreaptă la intrare și un altul la ieșirea dintr-o cărare, atunci cînd ai ajuns la o răspîntie. De acolo, nu vei mai apuca pe nici una dintre cărările însemnate decît dacă nu mai este nici una fără semn. În acest caz, va trebui să pornești pe cărarea însemnată în sens invers decît arată semnul, cu alte cuvinte ieșirea din cărare trebuie să o iei drept intrare, iar semnul de intrare în cărare îl faci acum pe partea stîngă, ocolind orice cărare însemnată pe stînga și pe dreapta.

— Ei bine, mă dau bătut, dar drept să-ți spun că nu-mi închipuiam că poate exista vreo teoremă de geometrie din care să fie eliminată orice noțiune de mărime, egalitate, asemănare,... eram ferm convins că problema cu labirintul nu va fi decît un divertisment matematic... și cînd colo...

— Dar chiar așa a și fost! Un divertisment matematic! De altfel, Euler a stabilit aceste teoreme pornind de la un alt divertisment, rămas celebru în istoria matematicilor, sub numele de Problema celor 7 poduri din Königsberg[1]...

— Atunci de ce ai țipat, ca din gură de șarpe, cînd am susținut că-i vorba de un divertisment? Acum, cînd m-am lăsat convins de argumentația ta, te întorci și-mi spui că a fost un divertisment?

— Ce să-ți fac dacă l-ai uitat pe Eminescu:

„Căci aceloraș mijloace
Se supun cîte există..."

[1] Azi Kaliningrad, port în U.R.S.S.

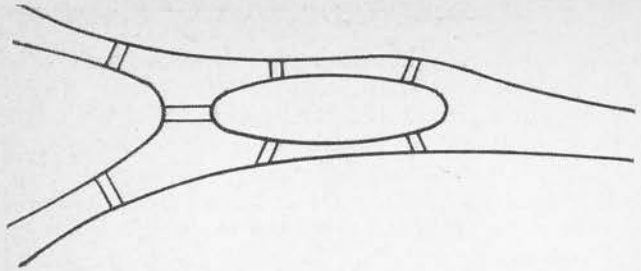
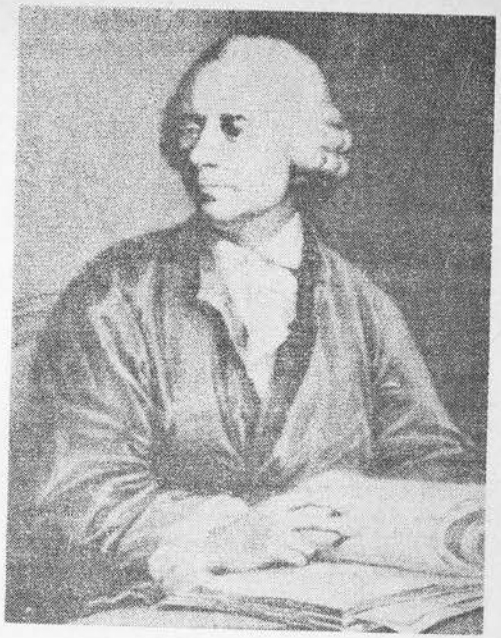


Fig. 9

Dar, ca să dreg lucrurile, și pînă la urmă să ne despărțim prieteni, lasă-mă să-ți vorbesc despre păsul ce se abătuse pe la jumătatea veacului al 18-lea asupra locuitorilor din Königsberg. Pe acolo trece rîul Pregel, înconjurînd insula Kneiphof. În acel loc existau 7 poduri, pe 5 dintre ele se ajungea direct pe insulă iar celelalte două traversau cele două brațe ale rîului, așa cum îți desenez eu aici (fig. 9). Din lipsă de ocupație, locuitorii orașului se amuzau încercînd să găsească posibilitatea de a face un drum închis, adică, pornind dintr-un punct, să se reîntoarcă tot acolo, după ce vor fi străbătut toate cele 7 poduri numai cîte o singură dată. Nereușind, distracția a devenit obsesie și mulți matematicieni au încercat să rezolve problema fără să-i găsească soluția. Așa a ajuns „ofu" pînă la urechile lui Euler, care pe atunci se afla la Petersburg[1]. Analizînd-o, Euler nu s-a mulțumit să repete că problema este imposibilă, ci, așa cum era natural pentru cel mai mare analist al timpului, a căutat să stabilească criterii generale după care să se poată cunoaște condițiile necesare ca problema să fie posibilă sau imposibilă. În 1736 el comunică Academiei din Petersburg rezultatele găsite, sub titlul: „Soluția unei probleme ce aparține geometriei de poziție", — „ad geometriam situs pertinentis" — a scris el, în latinește. El observă că soluția problemei nu depinde nici de lungimea, nici de forma podurilor, nici de distanța dintre ele și nici de mărimea insulei,

[1] Azi Leningrad.



Euler

ci numai de poziția — de situația — acestor poduri unul față de celălalt...

— Cît de ușor îmi este, după cele discutate mai înainte, să înțeleg cele ce și-a propus Euler: să cerceteze acele proprietăți geometrice ale figurilor care se păstrează cînd ele își pierd, prin deformare, orice proprietăți metrice ar avea. Atunci, ultimele două teoreme despre care am vorbit au fost stabilite de Euler?

— De el. Numai că acele două teoreme nu-i erau de ajuns pentru ca să găsească soluția la problema podurilor de pe Pregel. Acestora a trebuit să le mai adauge următoarea: „O figură care are mai mult de două noduri impare nu poate fi trasată complet printr-o trăsătură continuă".

— Dar aceasta nu contrazice prima teoremă, aceea că o rețea închisă are totdeauna un număr par de noduri impare?

— Nu. Căci faptul că o rețea este închisă nu-i conferă și proprietatea de a fi trasată printr-o trăsătură continuă!

— Așa-i, acuma de-abia îmi dau seama că făceam această confuzie. Cînd am stabilit că rețeaua este închisă, am pus condiția ca ea să nu aibă noduri de ordinul întîi, adică extremități libere, dar nu am menționat că ea trebuie să fie parcursă printr-o trăsătură continuă.

— Ca să te lămurești și mai bine, să schițăm rețeaua corespunzătoare traseului format prin cele 7 poduri (fig. 10). Punctul C este insula la care ajung cele 5 poduri, pe care să le notăm cu numerele 2, 3, 4, 5. Liniile 1 și 7 să reprezinte drumurile care duc de pe brațul drept sau de pe brațul stîng al rîului pe uscat, adică în oraș. Aceste două drumuri se întîlnesc cu 6, unul dintre cele 5 poduri care leagă direct insula cu orașul.

— Observ că schița ta este o rețea închisă care are 4 noduri, toate impare, unul de ordinul 5 și celelalte de ordinul 3. După teorema pe care mi-ai enunțat-o ea nu poate fi descrisă printr-o trăsătură continuă.

— Euler arată însă că acest drum poate fi parcurs în două reprize. În această privință azi se cunoaște o teoremă mai generală, datorită lui Listing, profesor la Göttingen, publicată de acesta în 1847, anume: „O rețea care are numai 2n noduri impare poate fi descrisă complet, prin n drumuri distincte". Rețeaua lui Euler referitoare la podurile de pe Pregel apare aici ca un caz particular al teoremei lui Listing pentru n=2. Pentru cazul particular, cînd figura are

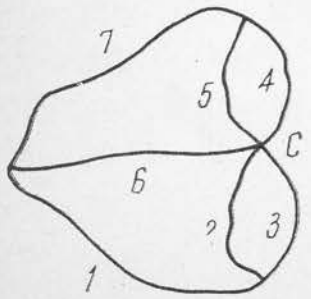


Fig. 10

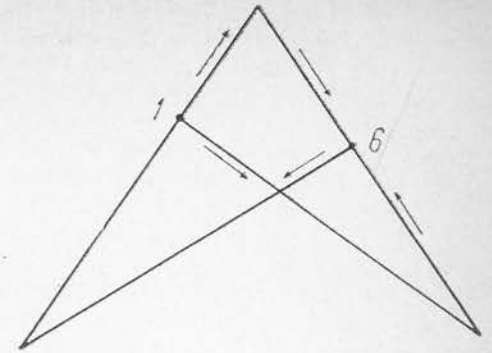


Fig. 11

numai două noduri impare, Euler a arătat că ea poate fi descrisă printr-o trăsătură continuă dar care nu se închide; drumul începe de la unul dintre noduri și se sfîrșește la celălalt. Un exemplu care știu că ți-e cunoscut este acela al patrulaterului complet (fig. 11). După cum vezi, figura are numai 2 noduri la ordinul 3 și ea se descrie în mod continuu, pornind din 1, ca să ajungi la 6.

— De cîte ori nu m-am jucat desenînd pe caietele de școlar acest patrulater, așa cum alteori desenam o floare sau profilul unui om, fără să bănuiesc peste ce bogăție de idei treceam în neștire! Aceste proprietăți formează cred un capitol aparte al geometriei?

— Nu un capitol, ci, azi, una dintre cele mai fecunde și puternice ramuri ale geometriei, anume Topologia.

— Atunci Euler este părintele topologiei?

— E greu de afirmat aceasta. Ca în orice știință, au existat și alții care au lăsat amprente mai timpurii. De pildă, Descartes și Leibniz! Descartes a stabilit formula despre care ți-am vorbit eu, odată mai demult, în legătură cu muchiile, vîrfurile și fețele unui poliedru.

— Da, mi-aduc aminte, și chiar că ai pomenit ceva despre Topologie sau Analysis situs, dar atunci nu ai insistat aproape deloc asupra acestui capitol.

— Fiindcă atunci nu avea rost să-ți spun nimic mai mult, în schimb, vom face-o, poate, acum. Cît despre Leibniz,

se cunoaște o scrisoare de a lui, adresată lui Huygens în 1679, unde spune clar: „Cred că ne trebuie încă și o altă analiză, una geometrică, care să exprime direct *situm* așa după cum algebra exprimă *magnitudinem*." Și, dacă vrei, ne-am putea referi chiar și la Aristotel. În fine, cu toate că Euler a stabilit aceste teoreme importante, nu i se atribuie lui și nici celorlalți înaintași paternitatea topologiei. Lucrările acestora au rămas multă vreme fără ecou. De-abia peste aproape 100 de ani, Vandermonde atrage din nou atenția asupra lor publicînd în Memoriile Academiei din Paris un articol: „Observații asupra problemelor de situație". El amintește de faptul că „Leibniz a promis un calcul al situațiilor dar a murit fără să publice nimic", adăugînd: „Este un subiect unde totul este de făcut și care ar merita multă atenție". La începutul veacului al XIX-lea Gauss prevedea rolul important pe care-l va juca „Geometria Situs" în aplicațiile viitoare ale matematicilor și, la îndemnul său, Jean B. Listing, profesor și astronom din Göttingen, publica, în 1847, prima carte de Topologie. Alături de cercetările anterioare, el a adăugat și pe ale sale personale și a folosit pentru prima oară cuvîntul „topologie". Tot pe atunci, independent de Listing, A.F. Möbius, unul dintre marii geometri ai veacului al XIX-lea, a făcut o descoperire uimitoare, aceea că există suprafețe care au numai o singură față. El a scris un memoriu, pe care l-a adresat Academiei de științe din Paris, dar acesta a rămas rătăcit multă vreme, printre alte memorii curioase.

— Era și natural! Ce înseamnă: Suprafețe cu o singură față? Uită-te la mănușa aceasta de la mîna mea, nu are ea două fețe? Aceasta din exterior și cea lipită de mînă, care formează cea de a doua față a ei! Nu mai vorbesc de o sferă goală în interior, acolo, cele două fețe sînt perfect separate una de alta! Dar cu o singură față? Oricît de subțire mi-aș închipui o foiță, ea rămîne mereu cu două fețe?

— Ei și dacă eu îți voi arăta, în modul cel mai simplu, o suprafață cu o singură față, ce ai să zici?

— Întîi să o văd!

— Uite, tai o bandă de hîrtie. Am dreptunghiul lungăreț ABCD (fig. 12). Dacă lipesc capetele AB și CD obțin un cilindru în care cele două fețe sînt ușor de recunoscut, ele fiind despărțite una de alta prin marginile distincte formate din liniile AD și BC, care nu se întîlnesc. Acum, fac însă o mică șmecherie, anume răsucesc banda o dată înainte de a o lipi așa încît, lipind marginea AB de DC, punctul A coincide cu C iar B cu D. Asta este banda lui

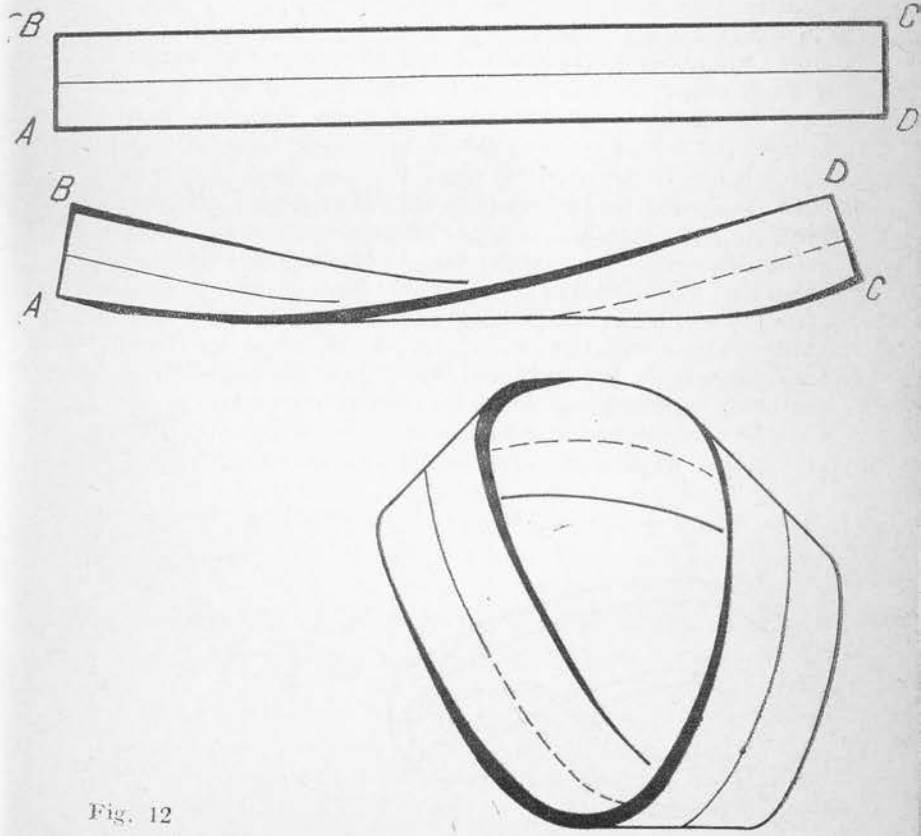


Fig. 12

Möbius și nu are decît o singură față și o singură margine. Ca să te convingi ia creionul roșu și caută să mîzgălești numai o față sau să însemni numai o margine!

— Ai dreptate, fără să trec peste margine parcurg cu creionul roșu ambele fețe. Despre margine, nici nu trebuie să mai încerc, fiindcă am lipit doar A cu C și B cu D.

— Acum te rog să-mi spui ce se va întîmpla dacă ai să tai banda lui Möbius în două, după linia ei mediană?

— Asta-i bună! Am să obțin două benzi Möbius, în loc de una!

— Bine, taie!

— Cum? Nu obțin două benzi ci numai una singură? Dar asta este, în adevăr, extraordinar! Nu mi-am putut închipui că are să se întîmple așa ceva! De data aceasta intuiția mea mi-a tras chiulul. Ar fi trebuit să mă aștept, de cînd m-ai avertizat că ai să faci „o mică șmecherie"!

— Bine, dar în realitate, n-am făcut nici o șmecherie! Însă faptele sînt de-a dreptul uimitoare și surprinzătoare și dacă ne-am pune mintea cu ele, ne-am putea juca o zi întreagă! Căci, aș putea să-ți arăt și o suprafață închisă avînd o singură față; este sticla lui Klein sau torul unilateral, uite-l desenat aici (fig. 13). Eu l-am văzut o dată printre modelele de la Seminarul Matematic Alex. Myller de la Universitatea din Iași. Dacă vrei, du-te și tu odată pe acolo, și va fi, cu siguranță, cineva care să te conducă la dulapurile cu modelele matematice, unde-l vei recunoaște chiar tu.

Dar, dacă mă întorc la întrebarea care mi-ai pus-o, repet că nici unul dintre acești mari matematicieni nu sînt privi

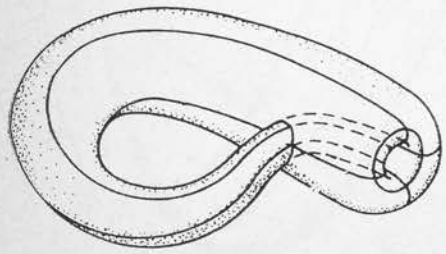


Fig. 13

viți altfel decît ca precursori. Drept creatori ai topologiei, în sensul modern al obiectului, sînt considerați a fi Bernard Riemann și Henri Poincaré.

— O! Henri Poincaré! Îți aduci aminte de plimbările noastre din timpul studenției, cu discuțiile care nu se terminau niciciînd fără supărare, despre articolele sale din „Science et l'Hypothèse"? Ne așteptam pe Sala pașilor pierduți, tu să ieși de la vreun curs de la matematici, eu de la istorie, ne cumpăram de la colț cîte un covrig și o porneam înspre Vidrașcu... Numai foamea sau vreun alt curs, de la care nu vroiam să lipsim, ne întorcea din drum... Mi-ar plăcea să-mi vorbești acum despre Poincaré, deși aș dori să aud și cîteva referințe despre Riemann. De el nu mi-ai vorbit niciodată.

— Da, am să-ți vorbesc despre Riemann fiindcă e o figură extrem de interesantă. Deși a fost un om deosebit de modest și mai ales de timid și a murit înainte de a împlini 40 de ani, el a dat un nou impuls, a recreat toate domeniile matematice de care s-a ocupat, degajînd și punînd în evidență acele noțiuni care stau la baza matematicilor moderne. În topologie el este acela care a desprins noțiunea de spațiu topologic, ca ceva autonom, caracterizat prin anumiți invarianți proprii, care vor da posibilitatea să se stabilească ulterior legături indisolubile între topologie și alte domenii, ca de pildă analiza. S-a născut în 1826. Era fiul unui pastor sărac de prin apropiere de Hanovra, al doilea din cei 6 copii ai lui. De mic a dovedit atracție pentru istorie și matematici. Rezolva cu ușurință problemele care i se dădeau și apoi imagina alte variante mai grele ale lor ca să puie la încercare pe frații și surorile lui, față de care, toată viața va arăta multă dragoste și interes. La gimnaziu, directorul observă talentul său matematic și îl cheamă să-și aleagă cărți din biblioteca sa. A luat „Teoria numerelor" scrisă de Legendre numai cu 30 de ani înainte, așadar pe atunci o carte foarte modernă, — de altfel nici azi nu-i o carte învechită. Peste 6 zile Riemann aducea cartea înapoi. Directorul a rămas mirat, fiindcă ea nu avea mai puțin de 600 pagini, și l-a întrebat cît a citit și ce a înțeles din ea.

— Am înțeles-o toată, e o carte admirabilă, a răspuns elevul, rugînd să i se dea altă carte. Directorul i-a dat alta.

Peste cîteva luni, cînd a trecut cu el examenul de teoria numerelor, s-a încredințat că Riemann înțelesese cu adevărat toată cartea și o ținea minte, deși de atunci nu o mai avusese în mînă. Mai tîrziu, inspirat de teoria numerelor prime, concepută și expusă în acea carte de Legendre, Riemann va da una dintre cele mai frumoase generalizări ale ei, introducînd o funcție nouă care-i poartă azi numele: „funcția zeta a lui Riemann". La 19 ani s-a dus la Göttingen și s-a înscris la Facultatea de teologie și filologie. Dorea să-i facă astfel bucurie tatălui său și totodată să-și poată asigura cît mai repede existența. Dar, în același timp, urma și cursurile de matematici pentru care simțea adevărata chemare. Tatăl său a înțeles însă lupta sufletească a fiului său și l-a sfătuit să se dedice matematicilor. Fericit de acest sfat, el plecă după un an la Berlin, unde predarea matematicilor era făcută mult mai amplu și mai modern, de către cei mai renumiți matematicieni ai timpului: Jacobi, Dirichlet, Steiner ș.a. Audiind aceste cursuri, Riemann a pus bazele moderne ale uneia dintre cele mai importante ramuri ale matematicilor de azi: Teoria funcțiilor de variabilă complexă, teorie care numără printre predecesori pe Gauss și pe Cauchy. După doi ani petrecuți la Berlin, Riemann s-a întors la Göttingen ca să prepare teza de doctorat în matematici. Aici l-a cunoscut pe Listing care publicase tocmai pe atunci cartea sa de topologie, și a avut curajul să se prezinte lui Gauss și să stea de vorbă cu el, ceea ce mulți matematicieni consacrați nu îndrăzneau să o facă.

— Atunci, de ce ai spus că era timid?

— Fiindcă era. Te vei convinge singur despre aceasta mai tîrziu. Întîlnirea cu Gauss face parte din gesturile eroice ale timizilor! Gauss, încîntat de discuția lui cu Riemann, aștepta să-i prezinte lucrarea de doctorat ca să o citească. Dar avea să aștepte încă 4 ani, pînă ce Riemann va veni să i-o aducă. La Göttingen el a audiat niște cursuri de filozofie și de fizică experimentală predate atunci de cunoscutul savant Wilhelm Weber; acesta, dîndu-și

Dirichlet

seama de geniul lui, s-a împrietenit cu el, antrenîndu-l în studiul fizicii matematice. Talentul lui Riemann s-a dovedit și în acest domeniu așa de uluitor încît mulți fizicieni și-au exprimat părerea că, dacă nu intervenea moartea prematură, realizările sale ar fi fost de aceeași calitate ca acelea ale lui Newton sau Einstein. Teza pe care a prezentat-o lui Gauss în vederea titlului de doctor avea ca titlu: „Fundamentele unei teorii generale a funcțiilor de variabilă complexă". Gauss, considerat atunci ca primul matematician al lumii, după ce a citit-o, i-a spus că avusese și el de gînd să scrie o lucrare despre acest subiect. În raportul pe care l-a întocmit scrie că Riemann se dovedește a fi

un spirit creator de o originalitate strălucitor de fecundă. Cred că asemenea laudă din partea lui Gauss nu mai are nevoie de nici un comentariu ! Și acum să vezi timiditatea lui Riemann: Ți-am spus că era foarte sărac, aproape că nu avea ce mînca. Ei bine, după ce a trecut teza de doctorat ar fi putut cere postul de asistent care se eliberase la Observatorul astronomic unde Gauss era director, dar n-a îndrăznit să o facă ! A continuat să fie repetitor, păstrînd un post care nu era plătit cu leafă fixă ci din taxele de la studenții liberi ce urmau cursul său și banii de-abia îi ajungeau ca să nu moară de foame. Într-o scrisoare pe care o scria tatălui său îl încuraja spunîndu-i că în curînd va fi „privat docent" și atunci viitorul îi va fi asigurat.

— Dar, după cîte știu eu, nici ca privat docent nu aveai un salariu fix de la Universitate, ci primeai numai ceea ce revenea din taxele studenților care îți audiau cursul.

— Așa-i. Și nu uita că el se aștepta să aibă la curs 2 sau 3 studenți. Iar cînd s-a trezit că s-au înscris 8 studenți, nu-i venea să creadă de bucurie. Fericit de acest succes, a scris tatălui său: „Am putut să-mi țin cursul în mod normal. Jena începutului și lipsa mea de încredere au dispărut în mod treptat. M-am obișnuit să mă gîndesc mai mult la auditori decît la mine și să citesc de pe figura lor dacă pot trece mai departe sau trebuie să mă opresc ca să mai explic odată problema". Aș vrea să adaug că scrisoarea aceasta a fost scrisă la interval de 3 ani după aceea de care ți-am amintit mai înainte. Aceasta pentru că atîta timp a mai zăbovit cu lucrarea pe care trebuia să o prezinte pentru docență. El spera că ea are să fie din domeniul fizicii. În acest scop el propusese chiar niște subiecte în legătură cu cercetările pe care le făcea. „Eram așa de absorbit de cercetările mele asupra unificării tuturor legilor fizicii, încît atunci cînd mi s-a comunicat subiectul tezei mele de docență, nu m-am putut smulge lor", așa scria el acasă, continuînd: „în parte, pentru că am lucrat prea mult, în parte pentru că am stat prea mult în casă și n-am putut ieși din cauza timpului rău, m-am îmbolnăvit. Vechea mea indispoziție mi-a revenit și nu am putut lucra multă vreme.

Gauss

De-abia peste cîteva săptămîni, cînd vremea s-a făcut mai bună și prietenii m-au încurajat, am început a mă simți mai bine..." Nu scria însă esențialul, anume că lipsa de hrană și plămînii erau de vină. În schimb, amintea faptul că, în locul subiectelor pe care le pregătise pentru examenul de docență, Gauss i-a propus altul, extrem de spinos, la care Gauss însuși meditase zeci de ani și nu avusese curajul să scrie nimic despre el.

„Sînt din nou încurcat, de cînd am de pregătit această lucrare. Am reluat cercetările mele asupra relațiilor între electricitate, magnetism, lumină și gravitație și am progresat destul ca să-mi public rezultatele fără teamă. Sînt din ce în ce mai convins că Gauss a lucrat la această problemă mulți ani și a discutat-o cu prietenii săi, între alții cu Weber. Ți-o spun confidențial, de frică de a nu fi considerat un închipuit ; sper că nu voi ajunge prea tîrziu și că-mi vor fi recunoscute meritele de cercetător independent".

Titlul tezei propuse de Gauss era: „Asupra ipotezelor care stau la baza geometriei", iar Riemann a lucrat-o în

așa fel ca toți membrii comisiei, chiar dacă nu erau specialiști în geometrie, să o poată urmări. Pînă azi, lucrarea a rămas ca una dintre capodoperele în domeniul matematicilor. Entuziasmul lui Gauss nu mai cunoștea margini și, lucru rar la el, vorbea despre Riemann cu multă căldură. Poate că între ei s-ar fi legat și prietenie dacă nu s-ar fi întîmplat un accident în viața lui Gauss, care peste cîteva luni i-a cauzat și moartea.

— Dar ce s-a întîmplat?

— La cîteva zile după ce Riemann și-a susținut teza, Gauss s-a dus cu trăsura să vadă cum se lucra la calea ferată ce avea să lege Göttingenul de Kassel. Probabil că, la un moment dat, caii s-au speriat și au răsturnat trăsura. Gauss a avut o comoție puternică, de care s-a vindecat după o lună și jumătate cînd a asistat la serbarea de inaugurare a căii ferate. Însă, nu după multă vreme a început a suferi de miocardită, de emfizem și deși continua să lucreze, avea crize din ce în ce mai dese și după 8 luni de la acea zi frumoasă pentru Riemann, Gauss a murit. La catedra lui Gauss a fost chemat Lejeune Dirichlet, fostul profesor de la Berlin al lui Riemann. Cred că știi că această chemare echivala în lumea matematică cu gloria de a fi considerat ca urmașul lui Gauss, princeps matematicorum! Dirichlet îl apreciase îndeosebi pe Riemann și îi arătase prietenie chiar înainte de a-și fi trecut examenul de docență, cu prilejul unei vizite mai îndelungi a acestuia la Göttingen. Iată ce îi scria tatălui său: „Ieri dimineață, Dirichlet a stat cu mine două ore. Mi-a adus și niște note de care aveam nevoie pentru teză, ceea ce m-a scutit de cîteva ore de cercetare serioasă în bibliotecă. Ba, chiar a citit cu mine întreaga teză și a fost foarte amabil: nu mă așteptam la aceasta, dat fiind marea diferență de rang dintre noi". Prin venirea lui Dirichlet la Göttingen, situația materială a lui Riemann s-a îmbunătățit. Întîi acesta a stăruit pe lîngă conducerea Universității să i se stabilească o leafă fixă. Aceste intervenții aveau, desigur, la bază, mai puțin prietenia cît valoarea intrinsecă a lucrărilor din domeniul matematicilor și al fizicii pe care le prezenta tînărul docent. În anul următor

el a obținut chiar postul de profesor ajutător, post prin care era absolvit de orice grijă materială. Lucrul acesta i-a fost bine venit căci tatăl lui murise și lui îi rămăsese în grijă întreținerea surorilor sale. Faima lui Riemann creștea tot mai tare. La aceasta a contribuit foarte mult interesul pe care i l-a arătat mereu Dirichlet. La moartea lui, în 1859, Riemann devine al doilea succesor al lui Gauss! Avea 32 de ani atunci. Prin această chemare i se recunoșteau, în mod cert, meritele și i se aducea omagiul de a fi considerat drept cel mai mare matematician al timpului său! Dar cu un trup ros de tuberculoză, nu va putea suporta lung timp această glorie. El se stinge în 1866, la vîrsta de 39 de ani.

— Îmi închipui cît de excepționale trebuie să fi fost cercetările sale matematice!

— Despre care, nici vorbă că nu le putem cuprinde noi doi! Cel mult pot adăuga că „Ipotezele care stau la baza geometriei" au însemnat o genială „lovitură de stat", pe care Riemann, spre deosebire de Gauss, a avut curajul să o aplice atotstăpînitoarei concepții a Geometriei clasice. El a descătușat astfel noțiunea de spațiu geometric și a proclamat dreptul oricărei geometrii să se dezvolte în spațiul ei specific, la fel ca și geometria din spațiul euclidian.

— Cum vine asta! spațiu specific? Dar ce este spațiul?

— Spațiul? E ceea ce știi și tu tot așa de bine ca și mine cînd folosești acest cuvînt. Este cadrul în care ne situăm noi, întîi pămîntul pe care ne aflăm, cu Dea și pădurea Mesteacănului, cu cercul polar și Ecuatorul, apoi toate planetele și toate stelele, cu toate drumurile pînă la ele și dincolo de ele; spațiul este acest cadru care ne înconjoară și pe care mintea îl poate străbate fără ca să se teamă că există undeva vreo ruptură, sau vreo prăpastie peste care să nu se poată trece, adică vreun loc unde să nu fie spațiu! Fără să ne spună nimeni, noi știm că spațiul este infinit și continuu, că are trei dimensiuni, că este același în orice direcție ne-am îndrepta...

— Exact așa îmi închipui și eu spațiul. De aceea nu cred că ar putea fi altul spațiul în care se desfășoară geometria!

— Geometria euclidiană; fă această completare, fiindcă-i necesară.

— De ce? Știu bine că există și geometrii neeuclidiene, în care axioma paralelelor nu mai este valabilă, dar nu-mi închipui că pentru aceste geometrii spațiul e obligat să se modifice și el!

— Ei vezi că nu-i așa! Pînă pe la sfîrșitul veacului al XVII-lea se accepta, în general fără contestare, ceea ce susții tu acum, adică principiile geometriei euclidiene și ale spațiului despre care am discutat. Chiar și în veacul al XIX-lea, aceste păreri mai dăinuiau încă. De aceea am accentuat mai înainte curajul lui Riemann, opunîndu-l timidității lui Gauss, care nu a atacat public problema spațiului geometric afirmînd că se temea de strigătul „Boeților", adică al acelora care rămăseseră fideli dogmei euclidiene. De la începutul veacului al 19-lea însă, obiectul geometriei cît și forma logică de dezvoltare a acestei științe au fost privite cu o anumită rezervă. Aceasta, tocmai din cauza geometriilor neeuclidiene care își făceau atunci apariția prin lucrările lui Bolyai, N. Lobacevski și C.F. Gauss. Or, privindu-le mai îndeaproape, aceste geometrii sugerau faptul că spațiul fizic ar putea fi diferit de imaginea cu care ne-a obișnuit intuiția noastră.

Pînă la celebra disertație a lui Riemann, în afara geometriei euclidiene o singură altă geometrie părea posibilă, aceea care diferă de geometria obișnuită prin postulatul paralelelor. Riemann însă a deschis o mult mai largă perspectivă acestei noțiuni de geometrie. El a arătat că geometria consideră ca date nu numai noțiunea de spațiu, ci și alte noțiuni pe care și le însușește prin axiomele sale. Iată cum se exprima Riemann în celebra lui disertație: „Raporturile mutuale ale acestor date primitive rămîn învăluite în mister și nu-ți poți da bine seama nici dacă ele sînt legate în mod necesar, nici pînă la ce punct sînt și nici a priori, dacă pot fi". Tot el observa mai departe că nimeni, de la Euclid pînă la Legendre, nu a lămurit acest mister, pentru că nimeni nu a cercetat mai îndeaproape noțiunea generală de mărime

multidimensională, care să cuprindă, ca un caz particular, mărimile spațiale!

— Îmi dau bine seama că în lucrarea lui Riemann asupra ipotezelor pe care se sprijină geometria trebuie să mai fie dezvoltate și alte idei, dar numai din cîte mi-ai spus pînă acum mi-e de ajuns ca să simt și eu entuziasmul și admirația ce le-a trezit în sufletul lui Gauss. Te simți copleșit de profunzimea gîndirii...

— Numai că foarte puțini au cunoscut atunci aceste gînduri, ale lui Riemann! Află că lucrarea nu a fost publicată decît după moartea lui, de către R. Dedekind. De-abia de atunci ea a fost îndemn pentru studiile viitoare. După cum ai putut vedea din citat, Riemann deschidea larg porțile și către geometriile cu mai multe dimensiuni, pe care tot geometrii de mai tîrziu le-au dezvoltat pe larg. Datorită acestor cercetări, azi se poate vorbi:

1. de spațiul intuitiv, adică de spațiul obișnuit, așa cum îl concepe spiritul nostru,

2. de spațiul fizic, ale cărui proprietăți ni le furnizează experiența,

3. de spațiile abstracte, care reprezintă concepțiile generalizate, deduse prin abstractizarea sau generalizarea spațiului intuitiv.

Ca să lămurim problema spațiului multidimensional, să ne gîndim la principiul pus de Descartes la baza geometriei sale analitice: poziția unui punct din spațiul euclidian se stabilește prin una, două sau trei lungimi, numite coordonatele punctului, după cum punctul respectiv se află pe o dreaptă (spațiu euclidian cu o dimensiune), într-un plan (spațiu euclidian cu două dimensiuni), sau în spațiu (spațiu euclidian cu trei dimensiuni). Orice proprietate a unei figuri din spațiul respectiv se traduce astfel printr-o proprietate a sistemului de numere care o caracterizează și invers. De aceea apare naturală generalizarea, prin analogie, a geometriei cu 3 dimensiuni într-o geometrie cu $n > 3$ dimensiuni. Așa, de pildă, spațiul fizic după concepția teoriei relativității este un spațiu cu patru dimensiuni, 3 fiind dimensiunile spațiului și cealaltă a timpului.

Dar se poate ajunge și la alte generalizări, de o natură mai abstractă. Cum nu le putem discuta, aici rămîne să alegem cazul particular al spațiului topologic, cel care ne interesează pe noi.

— Așadar, din cele ce mi-ai spus, cred că noțiunea de spațiu, să zicem de spațiu topologic, trebuie să o iau, mai mult, ca un fel intuitiv de a localiza proprietățile unei mulțimi de elemente — pe care le numesc puncte — asupra cărora am făcut anumite ipoteze?

— Ar trebui să mai adaugi ceva, căci nu orice mulțime de elemente, chiar dacă faci asupra lor anumite ipoteze, este un spațiu. Ca analogia să fie deplină, ar trebui să ți se dea posibilitatea ca să recunoști în această mulțime o proprietate a spațiului pe care l-ai intuit, de pildă punctele vecine între ele.

— Vrei să spui că trebuie să mi se dea distanța dintre două puncte?

— Da, ceva care să poată defini fie distanța dintre două puncte, fie vecinătatea lor. În spațiul topologic, unde se studiază proprietățile figurilor care nu se modifică la o deformare continuă, noțiunea esențială nu-i aceea de distanță între două puncte, ci aceea de limită sau de vecinătate dintre două puncte. Numai în geometria care ți-e familiară ție se întîlnește la fiecare pas noțiunea de distanță: — o latură a unui triunghi este mai mică decît suma celorlalte două, patratul ipotenuzei este egal cu suma patratelor celor două catete, ș.a.m.d. — Poincaré spunea că această geometrie „este cea mai comodă" față de spațiul cu care sîntem familiarizați, să-i spunem spațiul euclidian cu trei dimensiuni, spațiu în care ne-am deprins cu corpurile solide pe care le pipăim, din care ne construim instrumentele de măsură și care (cel puțin aparent) nu se modifică atunci cînd aceste corpuri sînt deplasate dintr-un loc în altul. Dar dacă ne-am fi născut în alt mediu și din moși-strămoși nu am fi cunoscut altă ambianță decît aceea, de pildă, a unui mediu gazos, unde mișcarea este legată de deformare, și nu am fi avut nicicînd noțiunea sau experiența corpului solid, atunci spiritul creator al matematicianului ar fi construit o

geometrie în care accentul s-ar fi pus pe această calitate, a deformării continue a corpurilor cînd sînt în mișcare și ar fi studiat proprietățile ce rămîn neschimbate la orice deformare continuă, adică ar fi făcut topologie. Acel matematician nu ar fi avut cum să se bazeze, în primele sale cercetări geometrice, pe mișcarea rigidă, care păstrează lungimile, unghiurile, ariile sau volumele. Poate că ar fi ajuns mai tîrziu și la această concepție, considerînd-o ca un caz particular al transformărilor topologice.

— Ia să încerc să-ți definesc eu ce este o transformare topologică, fiindcă tu te tot învîrți prin jurul acestei noțiuni, dar nu mi-o explici deslușit!

— Poftim! E foarte posibil să fie așa, deoarece, avînd atîtea de spus, sar de la una la alta, și uit tocmai esențialul. Cineva a făcut odată următoarea comparație: cel ce vorbește este ca un risipitor care aruncă banii fără să știe cum și pe ce, iar cel ce ascultă este ca un zgîrcit care strînge fiecare bănuț! M-aș felicita dacă mi-ai da tu o definiție cumsecade a transformărilor topologice!

— Să încerc: Se numește transformare topologică a unei figuri geometrice F în alta F′ aceea în care se poate stabili o corespondență continuă și biunivocă între toate punctele (a, b, c,...) ale lui F și (a′, b′, c′,...) ale lui F′.

— Da. Oare e meritul tău sau al meu?

— Bine! Trăiască Măria sa Orgoliul! Mai ales că îmi face o mare plăcere faptul că proprietățile topologice sînt proprietățile geometrice cele mai intime, cele mai profunde ale unei figuri, căci ele persistă și atunci cînd forma ei suferă schimbările cele mai fantastice!

— Da, numai cu condiția ca aceste schimbări să fie continue și să nu se ajungă pînă la a tăia figura și a lipi o parte peste alta. De altfel observația ta, foarte importantă, îți mai arată că teoremele topologiei rămîn valabile și pentru figurile rigide. Și, dacă stai să te gîndești mai bine, ajungi la constatarea că geometria euclidiană pare mult mai neaptă pentru interpretarea modernă a lumii fizicale decît topologia! Care ar fi corespondentul geometric euclidian în interpretarea sunetului, cînd undele care-l transmit își

Poincaré

schimbă forma în atmosfera care nu-i nici ea deloc rigidă? Și dacă deformarea rămîne cel mai intuitiv exemplu de proprietate topologică, ea nu-i și singura. „Contactul este o proprietate distinctivă a corpurilor" a observat N. Lobacevski. Aderența, vecinătatea, secționarea unui corp sînt la rîndul lor alte proprietăți topologice care și-au găsit numeroase aplicații în domenii diferite din matematici, prin intermediul topologiei. În ultimele decenii, Topologia și-a întins mult obiectul cercetărilor sale. Se divide în două părți distincte: topologia mulțimilor de puncte și topologia combinatorie sau algebrică sau, analysis situs, cum obișnuia să o numească Poincaré. Această din urmă ramură studiază proprietățile calitative intrinseci ale figurilor geometrice sau ale configurațiilor spațiale, dacă accepți un

termen mai adecvat, care rămîn invariante la transformările biunivoce continue. De altfel prima teoremă din topologia algebrică o cunoști foarte bine, ea se exprimă prin formula lui Descartes — Euler: $F + V - M = 2$, unde...

— Știu: M este numărul muchiilor, V al vîrfurilor și F al fețelor unui poliedru convex oarecare. Și, mai știu că oricum aș deforma poliedrul, presupus dintr-o substanță plastică, chiar dacă muchiile și fețele nu mai rămîn plane, formula aceasta se păstrează, adică este un invariant al poliedrului convex.

— Exact, este un invariant topologic. Iar meritul lui Poincaré constă în faptul că el a generalizat formula aceasta în cazul geometriilor cu mai multe dimensiuni. Stabilind noi invarianți topologici, el stimulează și dă impuls cercetărilor viitoare. Ai să înțelegi, cred, cît de vaste sînt aplicațiile topologiei, din această butadă a vestitului fizician și matematician Herman Weyl, rostită cu vreo 30 de ani în urmă: „În aceste zile, îngerul Topologiei și demonul Algebrei abstracte luptă pentru sufletele fiecăruia dintre domeniile matematice".

— Și de atunci pînă azi, cine a cîștigat mai multe suflete?

— Topologia! Nu vezi că din combinatorie și-a schimbat numele în algebrică? Dar acestea fiind zise... hai să încheiem această discuție neprevăzută căci uite, a răsărit steaua ciobanului și noi nu ne-am mișcat din loc!

— Cum? Fără să precizezi dacă schimbarea numelui a fost o transformare topologică?

PROBLEMA PĂTRATELOR MAGICE

sau

Unde poate duce
o partidă de șah

— Ai sacrificat atîtea figuri numai ca să-ți păstrezi caii, dar văd că n-ai greșit! Datorită lor ai evitat matul ce ți-l pregătisem cu atîta grijă.

— Totuși, partida ar fi putut sfîrși cu remiză, dacă ai fi fost mai atent!

— Nu mai avea nici un farmec, odată ce n-am reușit să-ți iau caii. Ei sînt puterea ta și eu am slăbit, hărțuindu-i.

— Adevărat că mi-s dragi căiuții și-mi place să-i joc, a rîs Teodor Solonar, dînd tabla șahului deoparte. De altfel, saltul lor, de la un cîmp alb la altul negru, a fascinat pe mulți dintre șahiști, chiar înainte ca jocul să fi fost cunoscut în Europa. Într-un manuscris din veacul al XVI-lea, se găsește o asemenea problemă care e reluată de Euler cu două veacuri mai tîrziu, desigur, fără ca Euler să știe ceva despre această proveniență. Pe vremea aceea Euler părăsise Rusia la invitația lui Frederich cel Mare, regele Prusiei, ca să conducă Academia din Berlin. În această calitate, el făcea parte din suita regelui și era obligat să asiste la multe dintre distracțiile de la Curte. Într-o asemenea ocazie, i s-a propus problema despre care ți-am vorbit, anume, să se stabilească drumul pe care trebuie să-l parcurgă un cal, pe tabla de șah, în așa fel ca el să străbată toate cîmpurile fără a mai trece vreodată prin același loc! Ca să nu se pro-

ducă nici o încurcătură, tabla de șah era acoperită de 63 de fise și treptat se ridica numai aceea ce se afla pe cîmpul pe care se așeza calul la un moment dat. Alții procedau altfel:

Foloseau primele 64 de bile de la un joc de domino și marcau cu cîte un număr, în ordinea naturală, toate locurile ocupate pe rînd de cal. În felul acesta, pe tabla de șah se puteau urmări pozițiile succesive ale calului, ori de cîte ori se încerca să se refacă jocul, ca să se găsească o nouă soluție.

— Și Euler a găsit-o?

— Da, iar rezultatul l-a publicat în Memoriile Academiei din Berlin pe anul 1759, relatînd în introducere cele ce ți-am povestit. El a intitulat această lucrare: „Soluția unei probleme ingenioase, care nu pare a se supune nici unei analize". Mai tîrziu s-a stabilit că problema fusese rezolvată cu o jumătate de veac mai devreme, de cavalerul de Montmort, și publicată într-o broșură apărută la Paris. Iată o soluție a ei:

58	23	62	15	64	21	54	13
61	16	59	22	55	14	51	20
24	57	10	63	18	49	12	53
9	60	17	56	11	52	19	50
34	25	36	7	40	27	48	5
37	8	33	26	45	6	41	28
32	35	2	39	30	43	4	47
1	38	31	44	3	46	29	42

După cum vezi, calul pornește de la cîmpul „1" apoi sare la 2, la 3 și așa mai departe, îndeplinind condiția de a ocupa pe rînd toate căsuțele tablei de șah, numai cîte o singură dată. Trebuie să știi că aceasta nu-i singura soluție. Nu mă voi ocupa de ele, căci mult mai interesantă îmi pare o

altă problemă sugerată de aceasta, anume să se găsească acea distribuție a numerelor care să arate pozițiile succesive ale calului pe tabla de șah, să-i spunem pentru prescurtare — acea distribuție cavalieră —, în care numerele respective să formeze și un pătrat magic!

— Cam complicată problemă! M-am uitat întotdeauna la pătratele magice pe care le întîlneam prin reviste, cu multă admirație, dar n-am îndrăznit să construiesc decît unul cu 9 căsuțe! Dacă ar fi să-l definesc, aș spune că un pătrat magic este un tablou de numere, așezate în tot atîtea linii cît și coloane...

— Spune-i un tablou pătrat sau, și mai simplu, un pătrat!

— Lasă-mă în pace, mă întrerupi și nu mai știu să spun mai departe!

— Hai, nu te fistîci, că nu ești la examen! E vorba de un tablou numeric în formă de pătrat în care suma numerelor...

— Acuma spun eu: suma numerelor de pe o linie este egală cu aceea de pe oricare coloană și cu aceea de pe fiecare diagonală.

— Dacă suma numerelor este aceeași numai pe linii și coloane dar nu și pe diagonale, pătratul se numește semimagic. Și dacă vrei, uite aici un tablou semimagic, cu distribuție cavalieră:

47	10	23	64	49	2	59	6
22	63	48	9	60	5	50	3
11	46	61	24	1	52	7	58
62	21	12	45	8	57	4	51
19	36	25	40	13	44	53	30
26	39	20	33	56	29	14	43
35	18	37	28	41	16	31	54
38	27	34	17	32	55	42	15

— Magic! Semimagic! Ce numiri! Te pomenești că sînt și pătrate hipermagice?

— Desigur că sînt, după cum vei întîlni și pătrate diabolice! Dar să nu te împingă fantezia să crezi că am de gînd să iscodesc, alături de tine, vreun ungher din cabinetul lui Faust! Titlurile de semimagic, hipermagic și altele datează de prin secolele XVIII sau XIX și au fost propuse ca să marcheze astfel, mai sugestiv, o proprietate în minus, sau în plus, ale pătratelor numerice respective, față de acelea ale pătratelor magice-tip.

— Dar despre numirea primitivă de pătrat magic ce-mi poți spune?

— Numirea aceasta este în adevăr foarte veche. Cu multe secole înaintea erei noastre, ele erau construite sub formă de talismane planetare întîi de către astrologii din India și China și apoi și de acei de limbă arabă, cu toții atribuindu-le anumite puteri magice. Și nu era de mirare, căci dacă pe atunci se considera că unele numere conțin în ele puteri misterioase, cum ar fi putut să nu se atribuie puteri sau influențe și mai misterioase sau magice unor tablouri de numere cu proprietăți așa de surprinzătoare? Pentru ei, pătratul cu un singur număr „1" era simbolul divinității: unitatea și eternitatea, — iar pătratul de ordinul 2, adică format cu $4 = 2 \times 2$ numere diferite era simbolul materiei imperfecte, deoarece 4 numere diferite simbolizînd cele „4 elemente": aerul, pămîntul, focul și apa nu puteau forma un pătrat magic! Pătratele magice începeau de la ordinul 3 înainte și erau consacrate planetelor, în sensul pe care îl avea pe atunci acest cuvînt. Astfel pătratele de ordinul 3 erau dedicate planetei Saturn, cele de ordinul 4 lui Jupiter, 5 lui Marte, 6 Soarelui, 7 lui Venus, 8 lui Mercur, iar cele de ordinul 9, adică formate din 81 de numere, Lunei! După cum vezi, Luna era privită ca Planeta cea mai importantă! Gravate pe plăci metalice de plumb, bronz, argint, ele erau purtate ca amulete iar azi le poți vedea expuse prin diferitele muzee.

— Probabil că, însoțite de aceste calități, au pătruns și în Europa?

— Era și natural. Aceasta s-a întîmplat pe vremea Renașterii. Le găsim la loc de cinste în cărțile astrologului Cornelius Agrippa, scrise la începutul veacului al XVI-lea. Matematicianul francez De la Hire, care a trăit la sfîrșitul veacului al XVII-lea și începutul celui următor, a descoperit, din întîmplare, la Biblioteca națională din Paris, un manuscris, datînd din primii ani ai veacului al XIV-lea, în limba greacă, despre pătratele magice. Autorul, Manuel Moscopulos, un bine cunoscut savant bizantin de la începutul veacului al XIV-lea, dedică lucrarea sa unui alt învățat din acel veac, Nicolae Artavaț, din Smirna, de origine armeană, cunoscut mai ales sub numele de Rabdas. Pe De la Hire l-a interesat mult acest manuscris și l-a tradus în limba franceză, publicîndu-l împreună cu un studiu personal, în Memoriile Academiei de științe din Paris, din 1705. Mai tîrziu același manuscris a fost cercetat și de Paul Tannery, care stabilește că în manuscrisul lui Moscopulos nu se vădește nici o urmă arabă și, ceea ce este și mai interesant, se pare că Moscopulos ignora complet orice semnificare magică sau talismanică a pătratelor magice! Nici măcar nu le numea magice ci numere pătrate (tetragonon arithmon). Moscopulos punea problema matematică a formării acestor pătrate și a stabilit, cel dintîi, faptul că nu există o metodă generală de a le forma, ci că aceste metode depind de natura pătratului. Astfel, el a găsit o metodă generală pentru formarea pătratelor magice de ordin impar, adică ale pătratelor în care numărul elementelor de pe o linie este impar: 3, 5,... și în general (2n + 1), apoi o altă metodă pentru pătratele de ordin dublu-par, adică acelea în care numărul elementelor de pe o linie se divide la 4, sînt deci de forma: 4n și promite o metodă generală, dar nu o dă decît sub formă de exemple particulare, pentru pătratele impar-pare.

— Înțeleg! Acelea în care numărul elementelor de pe o linie, împărțite la doi, dau un număr impar, ca 6, 10, 14, ...sau în general (4n + 2). Însă, nu înțeleg de ce menționează Tannery că lucrarea lui Moscopulos nu prezintă

influențe arabe odată ce mi-ai spus că problema pătratelor magice își are obîrșia în Orient!?

— Ei vezi, tocmai aici e toată frumusețea! Dacă Moscopulos a avut, în adevăr, ca sursă de inspirație o lucrare de origine greacă mai veche, lucrare care s-ar fi pierdut, înseamnă că și grecii și-au pus problema pătratelor magice, dar ca un divertisment aritmetic sau o problemă de combinație numerică, fără nici un fel de amestec de natură mistică. Pînă acum însă nu se cunosc alte lucrări rămase de la greci care să dovedească asemenea preocupări. Tot în acest sens pătratele magice au fost adoptate de către matematicienii din veacul al XVII-lea. De pildă, Fontenelle, secretarul perpetuu al Academiei de științe din Paris, unul dintre savanții cei mai subtili de atunci, subjugat și el de aceste pătrate, justifică astfel pasiunea sa: „nu sînt decît un joc dar care-și merită interesul prin dificultățile care ți le creează". Înainte de a se cunoaște lucrarea lui Moscopulos, Bachet de Méziriac a atras atenția asupra lor și el este primul care a stabilit o regulă generală de a forma pătratele de ordin impar, în cartea pe care publicat-o în 1612, la Lyon, sub titlul „Probleme distractive și încîntătoare care se fac cu numere".

— Dar el de unde le-a aflat?

— Le-a descoperit în cărțile lui Cornelius Agrippa și după ce le-a despuiat de învelișul lor mistic, le-a prezentat ca recreații matematice! Datorită lui au ajuns imediat la modă, captînd atenția multora dintre marii matematicieni din secolul al XVII-lea, al XVIII-lea și al XIX-lea! În vestitele „Recreații matematice" pe care le publica Ozanam la Paris, în veacul al XVII-lea, pătratele magice sînt tratate pe larg. Autorul ține să-și precizeze punctul de vedere: „Ar trebui, fără îndoială, să ai un spirit cu totul înclinat către viziuni mistice, ca să poți stabili vreo relație între planete și aceste așezări de numere, dar așa era tonul filozofiei mistice a Jamblicilor, a Porfirilor și a discipolilor lor. Matematicienii moderni, amuzîndu-se cu aceste aranjamente, care cer un spirit de combinare destul de

A. Dürer:
Melancolia

ascuțit, nu le dau decît importanța care o merită în acest sens".

— Cum le-a privit Fermat, despre care mi-ai spus că era un as în teoria numerelor?

— Fermat? Cu el povestea-i foarte frumoasă. După cum ți-am mai spus, Fermat era consilier al Parlamentului din Toulouse și avea un bun prieten la Paris, pe consilierul Bernard Frénicle de Bessy care era și el renumit pentru dexteritatea cu care rezolva cele mai spinoase probleme de aritmetică. Nu știu dacă se cunoșteau personal dar erau într-o corespondență neîntreruptă. De la el a aflat despre pătratele magice. Natural că pe nici unul dintre ei nu-i puteau satisface simplele pătrate, așa cum le-am definit noi. Ei le-au impus condiții noi, creînd astfel dificultăți care să le ofere plăcerea de a le depăși. Despre acestea îți

Fermat

voi vorbi însă mai tîrziu. Acum am să-ți spun numai că, după moartea lui Frénicle, s-au găsit și publicat 880 de pătrate magice de ordinul patru, iar printre manuscrisele rămase de la Fermat s-au găsit 14 caiete și multe foi detașate pline cu pătrate magice. Într-o scrisoare a lui către Mersenne spunea că „invenția lui Frénicle" îl încîntă — prin aceasta înțelegea pătratele magice — și că ar dori să afle cîteva dintre metodele acestuia, căci acelea inventate de el îl conduc la prea multe calcule! Într-o altă scrisoare, tot către Mersenne, se găsește un pătrat magic care are ordinul 12, adică e format din 144 de numere: „Pătratul acesta este incomplet", scria Fermat, „fiindcă n-am timp să-l termin pînă pleacă curierul. El mai cuprinde încă 5 bande

exterioare, compuse în așa fel încît pătratul de ordinul 22 care se formează este tot magic!"

—Nu văd de ce pătratul despre care-mi vorbești ar avea ordinul 22?

— Socotește și tu: mărginindu-l cu un rînd exterior se adaugă cîte un număr de fiecare parte, așadar se face un pătrat cu 14 numere pe latură. Adăugînd 5 benzi exterioare, pătratul se mărește cu 10 numere pe fiecare latură a lui. E clar?

— Acuma da! Numai nu înțeleg cum vine asta că pătratul rămîne magic?

— Ei, asta este una dintre condițiile suplimentare pe care le-a adăugat Fermat pătratelor magice. Asemenea pătrate se numesc pătrate cu margine și sînt construite în așa fel încît dacă se scoate marginea, rămîne tot un pătrat magic!

— Să știi că este un amuzament care m-ar amuza și pe mine!

— Să știi că nu-i numai un amuzament! Am citit mai anii trecuți într-o revistă, și îmi pare foarte rău că nu mi-am notat unde — că deși nu știu care lord ar fi spus: „Îmi place să mă ocup cu pătratele magice fiindcă sînt sigur că nu pot avea nici un fel de întrebuințare practică", azi ele și-au găsit și o aplicație practică, anume în agricultură și într-un dispozitiv aplicat la războaiele de țesut moderne...

— Cum, și tu nu ai căutat să urmărești problema aceasta mai îndeaproape?

— Nu. Fiindcă n-am mai avut cum. Mă duc așa de rar pe la Seminarul Matematic „Alexandru Myller" din Iași și atunci crezi că am timp să răsfoiesc toate revistele? Mai ales că de fiecare dată vreau să-mi lămuresc o anumită problemă, care mă tentează atunci. Și cînd mă cufund într-o carte, uit cu totul de celelalte probleme... am îmbătrînit și eu și nu le mai pot cuprinde pe toate deodată... Dar, să las văicărelile și să ne apucăm de treabă! Știi ce-i ordinul unui pătrat magic?

— Desigur, că doar despre el am vorbit pînă acum! Este numărul elementelor de pe o linie.

— Acuma află ce este constanta sau numărul magic al unui pătrat: este suma numerelor de pe un rînd, coloană sau diagonală. Și dacă, pentru construirea unui pătrat se aleg primele numere de la 1 la n^2, atunci valoarea constantei pătratului de ordinul n este ușor de stabilit.

— În adevăr, nu-i nici o filozofie. Toate rîndurile au aceeași sumă, deci va trebui să aflu suma tuturor rîndurilor și să o împart la n. Or, suma numerelor din toate rîndurile este egală cu suma numerelor de la 1 la n^2: Avem întîi:

$$S_{n^2} = \frac{(1 + n^2) \cdot n^2}{2}$$ și apoi:

$$C_n = \frac{(1 + n^2) \cdot n}{2}$$

— Să-ți mai spun și cîteva proprietăți generale ale pătratelor:

1. Un pătrat magic își păstrează proprietatea dacă se mărește sau se micșorează, dacă se înmulțește sau se împarte fiecare dintre numerele din care este format pătratul cu aceeași cantitate.

— Proprietatea aceasta este evidentă fiindcă adăugîndu-se, într-un fel oarecare, aceeași cantitate la fiecare număr, sumele pe linii, coloane sau diagonale se măresc fiecare cu aceeași cantitate. Așadar, suma rămîne magică dar se modifică.

— Atunci, cred că ți-e clar de ce e mai simplu să se folosească pentru construirea pătratelor magice primele n^2 numere?

— Desigur. Formîndu-l întîi cu acestea, pot apoi să-l transform, înlocuind numerele de la 1 la n^2 prin altele corespunzătoare lor, făcînd parte dintr-o progresie aritmetică oarecare.

— Uite altă proprietate: Adunînd sau scăzînd elementele respective din două pătrate magice, se obține tot un pătrat magic. E vorba numai ca elementele să ocupe aceeași poziție în ambele pătrate.

— Bine, dar dacă cele două pătrate nu au același ordin?

— Atunci le faci să fie de același ordin, adăugînd pe linii și pe coloane atîtea zerouri cît e necesar ca pătratul de ordin mai mic să ajungă la același ordin cu celălalt.

— În acest caz, mă închin. Te pomenești că se pot schimba și liniile între ele?

— Cu anumite restricții, da. Nu uita că schimbînd liniile sau coloanele între ele, se schimbă elementele de pe diagonale și deci acestea pierd proprietatea magică! Însă dacă se schimbă între ele două linii și două coloane toate simetrice față de linia și coloana mediană a pătratului, se păstrează proprietatea magică.

— Stai să-ți dau un exemplu practic: dacă pătratul e de ordinul 5, atunci pot schimba linia 1 cu a 5-a și coloana 1 cu a 5-a, sau linia a doua cu a patra și coloana a 2-a cu a 4-a, da? Iar dacă pătratul e de ordinul par?

— Atunci e la fel! Această restricție corespunde faptului că elementele de pe diagonale nu se schimbă ci numai se permută între ele.

— Aș vrea să-mi spui însă, în mod practic, cum procedez ca să formez toate pătratele magice de ordinul trei!

— Chiar toate? Știi cît de multe-s?

— Oricît de multe or fi! Mi-ai spus că se cunosc reguli generale!

— Ei, atunci să le formăm! Să scriem întîi cele 9 numere în ordinea lor naturală:

$$(T)\quad \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{matrix}$$

Dacă te uiți mai atent la tabloul (T), pe care-l vom numi de aici înainte tabloul natural, vei observa că numerele de pe cele două diagonale și acelea de pe linia și coloana mediană au aceeași sumă, egală cu constanta pătratului: 15:

$$1 + 5 + 9 = 3 + 5 + 7 = 4 + 5 + 6 = 2 + 5 + 8 = 15.$$

— Prin urmare 4 dintre condiții sînt gata îndeplinite. Dar de toate trebuie să fie 8. Mai ai nevoie de încă patru

combinații de cîte 3 numere, altele decît acestea, care să dea suma 15. Uite, de pildă, $1 + 6 + 8 = 15$.

— Tot așa și $2 + 4 + 9 = 15$, și încă $2 + 6 + 7$ și $3 + 4 + 8 = 15$.

— Atunci sînt exact 8. Alte combinații nu mai sînt posibile?

— Nu.

— Atunci nu există decît un pătrat magic de ordinul 3?

— Îmi pare rău că trebuie să te deziluzionez! În schimb, vei avea ocazia să cunoști cel puțin 880 de pătrate magice de ordinul 4, atîtea cîte a construit Frénicle, peste 50 000 de pătrate de ordinul 5, peste 4 000 000 de ordinul 6, peste 400 000 000 de ordinul 7, îți ajung?

— Doar n-ai pretenția să-mi spui că s-a găsit vreun nebun care să calculeze patru sute de milioane de pătrate magice de ordinul 7?

— Mai întîi, te-aș ruga să-ți retragi epitetul! Al doilea, nu-i necesar să le calculezi efectiv, ca să le poți număra! M-ai dezamăgit!

— Îmi pare rău, dar ca să-ți treacă, arată-mi ce fac cu cele 8 sume găsite? Singure, știu că nu se vor grupa într-un pătrat magic de ordinul 3!

— Nu, dar nici nu le-am stabilit în acest scop, ci numai ca să-ți arăt cîte pătrate de ordinul 3 se pot face! Am ținut să te fac să vezi că problema construirii unui pătrat magic nu este decît o problemă de algebră elementară, deoarece se cere să se determine n^2 numere supuse la... cîte condiții?

— Nu-i mare lucru să-ți răspund! Întîi n condiții pentru a scrie că suma numerelor de pe cele n linii este constantă, apoi încă n condiții analoage pentru cele de pe coloane și încă 2 pentru suma de pe diagonale. În total $2n + 2$ condiții. Pentru $n = 3$ avem deci 8 condiții, așa că te-am prins cu mîța-n sac! Ar trebui să fie o infinitate de soluții, fiindcă așa am învățat eu că se întîmplă dacă am 8 ecuații cu 9 necunoscute!

— Ai învățat foarte bine, dar aici cele 9 necunoscute nu-s de capul lor, adică vreau să spun că nu-s niște numere arbitrar alese, ci îndeplinesc o condiție, aceea de a se găsi în progresie aritmetică, așa că de fapt ai 9 ecuații cu 9 necunoscute!

— Iar ai dreptate. Dar eu nu mă aleg cu nimic din asta, fiindcă tot n-am izbutit să știu cum formez pătratul de ordinul 3!

— I-a veni și vremea lui! Deocamdată să terminăm problema începută: pentru $n > 3$, n^2 este totdeauna mai mare decît $2(n + 1)$ și deci numărul necunoscutelor este mai mare decît al condițiilor puse, adică al ecuațiilor. De aici rezultă și mulțimea soluțiilor.

La calculele provenind din rezolvarea unor asemenea ecuații s-a referit probabil Fermat, în scrisoarea lui către Mersenne. El era convins că Frénicle descoperise vreun procedeu practic și era, ca și tine, nerăbdător să-l afle. Și acum să-ți arăt procedeul lui Bachet de Méziriac, care se aplică la pătratele de ordin impar. Să operăm deodată atît cu un pătrat de ordinul 3 cît și cu unul de ordinul 5.

Întîi desenăm cele două pătrate împărțite respectiv în 9 și în 25 de căsuțe și în exteriorul lor, pe fiecare latură, se adaugă, punctat, în formă de scară alte pătrate de aceeași mărime ca și căsuțele din interior (fig. 14a și 15a).

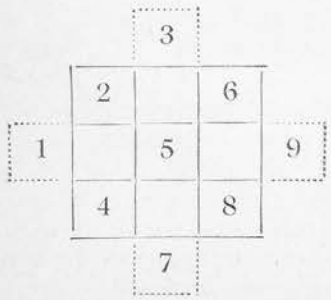


Fig. 14 a

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Fig. 14 b

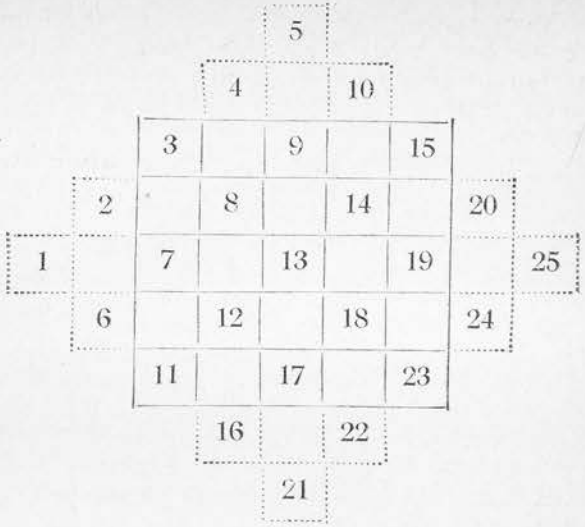


Fig. 15 a

3	16	9	22	15
20	8	21	14	2
7	25	13	1	19
24	12	5	18	6
11	4	17	10	23

Fig. 15 b

În felul acesta se formează, la primul pătrat, 3 linii oblice paralele cu diagonala dusă de jos în sus și de la stînga la dreapta, iar în pătratul al doilea se formează, la fel, 5 linii oblice. Pe acestea le umplem, începînd din punctul de jos

al primei oblice, cu numerele consecutive de la 1 la 9 și de la 1 la 25, exact ca în (T).

— Bine, am executat. După cîte văd, s-a transpus astfel pe diagonala despre care ai vorbit linia mediană a tabloului natural (T) și pe cealaltă diagonală coloana mediană, așadar acestea vor rămîne mai departe neschimbate, avînd suma magică.

— Exact. Rămîne acum să introducem în interiorul pătratului numerele scrise în exterior. Aceasta se face ținînd seama de regula: orice număr din exterior se transmută în interior, în aceeași linie sau coloană în care se află la o depărtare de atîtea căsuțe de el, cît este ordinul pătratului respectiv. De pildă, în primul caz, numărul 3 va fi pus sub 5 adică în căsuța a 3-a de sub el, iar numărul 9 la stînga lui 5, acest loc fiind situat la depărtarea de 3 căsuțe de el. În mod analog, în cel de al doilea pătrat, 4 trebuie scris în coloana a doua locul 5, 25 peste 5 căsuțe în linia a 3-a, locul 2 etc. Să formăm alăturat pătratele respective (fig. 14b și 15b).

— Ai dreptate! Fără prea multă bătaie de cap pot construi un pătrat magic de ordin impar. Ba poate chiar mai multe, fiindcă regula trebuie să se mențină și dacă aș începe să scriu tabloul numeric nu de jos în sus ci de sus în jos, și nu numai de la stînga la dreapta ci și de la dreapta la stînga. Însă nu văd prea multă variație, nu cred că metoda e generală și-mi poate da posibilitatea să scriu orice pătrat magic aș vrea, fie el și numai de ordin impar.

— Am să-ți arăt atunci o metodă generală, tot pentru pătratele de ordin impar, imaginată de Philippe de la Hire. Metoda lui se bazează pe proprietatea de sumare a două pătrate magice.

— Adică, vrei să spui că va folosi două pătrate magice mai simple și prin sumarea lor se va obține pătratul magic pe care-l doresc?

— Da. Cele două pătrate magice, despre care va fi vorba, se vor putea construi fără nici o bătaie de cap, dacă ne referim din nou la tabloul natural (T) și îi descifrăm una dintre tainele lui magice.

— Va să zică, îmi umbli și mata, bădie, tot cu magia?

— Și încă ce magie! Ascultă și te minunează și tu! Fiindcă vreau să te emancipez și să te pun în fața unui pătrat magic de ordinul 7 să formăm tabloul natural corespunzător:

(T)

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	..	..
.....						

Ultimul număr din rîndul întîi este 7. Folosindu-l numai pe el pot forma toate numerele din rîndul doi, numai cu ajutorul numerelor din rîndul întîi. Vezi cum?

— Mare greutate! $7 + 1 = 8$, $7 + 2 = 9$ ... $7 + 7 = 14$. Ba, pot merge și mai departe. Folosindu-mă, în mod analog, de 14, îți scriu pe nerăsuflate și rîndul 3: $14 + 1 = 15$, $14 + 2 = 16$ ... $14 + 7 = 21$!

— Vezi, asta a fost ideea ingenioasă a lui De la Hire. El a remarcat că tabloul (T) poate fi înlocuit cu două șiruri de numere, primul

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

și al doilea 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42.

— Și pe zero de ce l-ai adăugat? Cred că de frumusețe, nu?

— Ba tocmai de aceea! Punîndu-l și pe el, rîndul al doilea are tot 7 numere ca și primul și, în plus, procedînd și cu zero la fel ca și cu celelalte numere din acest șir, obțin primul rînd din tabloul (T).

— Ei și? Unde-s pătratele?

— Iată-le! Primul îl formez numai cu numerele de la 1 la 7. În prima linie, le așez la întîmplare. În linia a doua și apoi succesiv în celelalte, încep cu primul număr care se află după cel din mijloc în rîndul de mai sus. Observă că astfel nu ai pe nici o linie sau coloană două numere egale, ci toate sînt diferite. La fel și pe diagonale.

— Am prin urmare un pătrat magic, numai că el nu are toate elementele sale diferite!

— Adevărat! Dar pentru un pătrat ajutător, cred că face față onorabilă!

— Am impresia că încep să ghicesc restul. Nu cumva procedăm la fel și cu celelalte 7 numere din rîndul al doilea?

— Ba da. Dar acum liniile se formează începînd chiar de la numărul din mijloc.

— Dar de ce?

— Ai să înțelegi și mai bine după ce vei aplica regula, dar ca să nu fi curios ți-o spun: în felul acesta eviți pericolul de a se repeta vreun număr în pătratul final.

— Care pătrat final? Nu mi-ai vorbit de el!

— Cînd era să-ți vorbesc, dacă mă sîcîi cu tot felul de întrebări? Să reluăm deci procedeul! Formezi două pătrate magice de ordinul 7 — sau de orice ordin impar, exceptînd trei, despre care vom sta de vorbă mai tîrziu.

Constanta primului pătrat este egală cu

$$\frac{1+7}{2}\cdot 7 = 28, \text{ iar a celuilalt } \frac{0+42}{2}\cdot 7 = 147$$

— Da. În cazul al doilea am o progresie aritmetică cu rația 7. Suma este = 147. Și acum să fac suma termenilor corespunzători din cele două pătrate?

— Da și vei obține un pătrat magic de ordinul 7, care va cuprinde toate numerele de la 1 la 49 și nici un număr din tabloul întîi nu se va aduna de două ori cu același număr din tabloul doi, pentru că în nici unul dintre cele două tablouri nu apare același număr de două ori în aceeași linie sau coloană. Iar constanta pătratului magic va fi egală cu

suma celor două constante 28 + 147 = 175, cum te poți convinge și direct.

3	5	1	2	6	4	7
6	4	7	3	5	1	2
5	1	2	6	4	7	3
4	7	3	5	1	2	6
1	2	6	4	7	3	5
7	3	5	1	2	6	4
2	6	4	7	3	5	1

7	21	0	14	35	42	28
14	35	42	28	7	21	0
28	7	21	0	14	35	42
0	14	35	42	28	7	21
42	28	7	21	0	14	35
21	0	14	35	42	28	7
35	42	28	7	21	0	14

10	26	1	16	41	46	35
20	39	49	31	12	22	2
33	8	23	6	18	42	45
4	21	38	47	29	9	27
43	30	13	25	7	17	40
28	3	19	36	44	34	11
37	48	32	14	24	5	15

— Așa mai înțeleg și eu! Numerele din cele două tabloauri ajutătoare le pot varia în toate chipurile posibile și deci numai din primul șir pot forma, prin permutările numerelor de la 1 la 7, exact 5040 de pătrate magice. Pe fiecare în parte îl pot aduna cu fiecare din cele 5040 de pătrate de al doilea fel și ajung astfel la peste 25 de milioane.

— Sînt cu mult mai multe, căci n-ai ținut seamă de toate posibilitățile de permutare ca să obții pătratele ajutătoare!

— Se poate, dar mă mulțumesc și cu atîtea. Aș vrea să regăsesc și prin această metodă pătratul de ordinul trei! În acest caz unul dintre pătratele ajutătoare trebuie construit cu numerele 1, 2, 3, iar al doilea cu numerele 0, 3 și 6. Lasă-mă pe mine să le construiesc. Avem:

3	1	2
2	3	1
1	2	3

și

0	3	6
3	6	0
6	0	3

Dar ce înseamnă aceasta? Văd că nici unul dintre pătratele construite de mine nu-s magice? Oare toată teoria ta de mai înainte a fost falsă?

— De loc! Dar metoda aceasta nu se aplică la pătratele de ordinul 3 decît cu oarecare precauție. Nu uita că aici nu ai decît 3 numere și deci în permutările pe care le faci, în primul caz 3 rămîne pe diagonală și atunci obții suma 9 pe acea diagonală, iar în al doilea pătrat, 6.

— Și atunci?

— Atunci alege numerele așa, ca rîndul să nu înceapă cu 3, ci cu 2: să zicem de pildă 2, 3, 1, iar celălalt 0, 6, 3.

— În acest caz avem:

2	3	1
1	2	3
3	1	2

și

0	6	3
6	3	0
3	0	6

fac

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Am regăsit pătratul cunoscut în care liniile sînt schimbate în coloane.

Dar de s-ar aduna alte pătrate, de pildă:

2	1	3
3	2	1
1	3	2

și

3	0	6
6	3	0
0	6	3

fac

5	1	9
9	5	1
1	9	5

Amîndouă sînt magice, numai că cel de al doilea l-am format după aceeași regulă ca și pe cel dintîi. Rezultatul este un pătrat magic însă, în loc de toate numerele de la 1 la 9, nu găsim decît grupul de 3 numere 5, 1, 9.

— După cum te-ai încredințat, e vorba să respecți principiul de formare a celor două pătrate, căci nu-i de ajuns ca pătratele să fie fiecare în parte magic, ci să nu se întîmple combinații de numere care să ducă la aceeași sumă în mai multe rînduri diferite, cum a fost cazul ultim. Apoi, să mai ții seama că, în cazul special n = 3, nu orice repartiție a celor 3 numere răspunde condițiilor cerute ca să se formeze pătratul magic. Acest lucru îl vei vedea și mai clar în cazul pătratelor pare. Din această cauză la pătratele pare nu se aplică nici una dintre metodele despre care am discutat la pătratele impare. Ba, chiar nici la toate pătratele de ordin par nu s-a putut stabili o aceeași metodă de construire a lor, ci a fost necesar să se despartă pătratele pare în de două ori pare și în pătrate impar-pare. Mai simple sînt, în privința construcției, cele de două ori pare, adică pătratele de ordinul 4, 8... 4n. Pentru acestea, metoda lui De la Hire cere numai următoarele modificări:

1. În primul pătrat ajutător, numerele care ocupă linia întîi trebuie dispuse în așa fel ca celulele simetrice față de mijloc să cuprindă numerele echidistante din progresia aritmetică, apoi:

2. În linia a doua se înscriu, în ordinea inversă aceleia din prima linie, numerele considerate. Dacă pătratul este de ordinul patru atunci cu aceste două linii s-a atins mijlocul lui iar celelalte două linii care au mai rămas se completează prin simetrie față de linia mediană, adică se repetă întîi linia a doua și se termină cu linia întîi. Dacă patratul este de ordinul 8, sau mai mare, atunci se urmează ordinea 1—2, de atîtea ori cît este necesar pentru a se ajunge la mijloc, după care se continuă prin simetrie față de linia mediană. Pentru pătratul al doilea se păstrează exact aceleași reguli, numai că totul este relativ la coloane și nu la linii.

— Am înțeles eu ceva, dar e mai bine să precizăm. Mi-ai vorbit de numere echidistante. Într-o progresie aritmetică: dacă scriu numerele 0, 4, 8, 12, echidistante sînt 0 și 12 sau 4 și 8, nu-i așa?

— Întocmai. Cunoști proprietatea lor: acestea au aceeași sumă: 12.

— Da, și îmi închipui că tocmai de aceea se și aleg mereu perechi.

— Nu numai atît, dar se are grijă ca aceste perechi să se afle în căsuțe simetrice pentru că numai astfel proprietatea lor poate fi valorificată. Altfel nu s-ar mai obține un pătrat magic, fapt de care te poți convinge ușor, nerespectînd aceste reguli. Acum cred că-i timpul să aplicăm cele spuse.

— Primul pătrat îl construiesc cu numerele 1, 2, 3, 4, ținînd seamă de perechile 1, 4 și 2, 3. Al doilea cu numerele 0, 4, 8, 12, și apoi adun numerele corespunzătoare:

1	3	2	4
4	2	3	1
4	2	3	1
1	3	2	4

8	4	4	8
12	0	0	12
0	12	12	0
4	8	8	4

de unde

9	7	6	12
16	2	3	13
4	14	15	1
5	11	10	8

Scriind numerele după regula indicată am putut să văd cum se distribuie perechile de numere pe linii, coloane și diagonale, în așa fel ca să se obțină aceeași sumă pretutindeni. Nu înțeleg de ce nu se realizează aceasta și în cazul pătratelor de ordin impar-pare?

— N-ai decît să încerci să aplici regula și la un asemenea caz, de pildă, la un pătrat de ordinul 6, și ai să constați singur deosebirea.

— Așa am să și fac. Pe de o parte am grupul: 1, 2, 3, 4, 5, 6, unde perechile sînt: 1, 6, apoi 2, 5, și 3, 4; pe de altă parte am numerele 0, 6, 12, 18, 24, 30 cu perechile: 0, 30; 6, 24 și 12, 18. Fixez numerele din prima linie a primului pătrat ajutător și le scriu invers în linia a doua:

2	1	3	4	6	5
5	6	4	3	1	2
2	1	3	4	6	5
2	1	3	4	6	5
5	6	4	3	1	2
2	1	3	4	6	5

0	30	0	0	30	0
24	6	24	24	6	24
12	18	12	12	18	12
18	12	18	18	12	18
6	24	6	6	24	6
30	0	30	30	0	30

— Acum văd care-i dezastrul! Pătratul pe care l-am format nu mai are proprietatea magică! Se obțin sume constante, la primul numai pe linii și pe cele două diagonale; pe coloane și pe diagonale la al doilea. Aceasta din cauză că nu mai am corespondența perechilor de numere egal depărtate de extremitățile șirului.

Văd că aici nu se mai poate aplica metoda de mai înainte!

— Ba se va aplica, însă în urmă vor fi de făcut anumite rectificări. Așa că, înainte de a ți le arăta, te sfătuiesc să faci suma numerelor din tablourile pe care le-ai scris.

— Nimic mai simplu, se obține pătratul în care suma magică se află numai pe diagonale.

2	31	3	4	36	5
29	12	28	27	7	26
14	19	15	16	24	17
20	13	21	22	18	23
11	30	10	9	25	8
32	1	33	34	6	35

— Acum rămîne să lăsăm numerele de pe diagonale neschimbate și să permutăm celelalte, în așa fel ca să se obțină suma magică peste tot. Ea este egală cu $\frac{1+36}{2} \cdot 6 = 111$. Desigur că nu se pot permuta între ele decît numere corespunzătoare, adică echidistante sau simetrice față de linia sau coloana mediană.

— Iată o posibilitate: dacă schimb în coloana a 3-a pe 3 cu 33 și pe 28 cu 10 atunci în cele 4 linii am suma magică: $2 + 31 + 33 + 4 + 36 + 5 = 111$, $29 + 12 + 10 + 27 + 7 + 26 = 111$, în linia a 5-a: $11 + 30 +$

+ 28 + 9 + 25 + 8 = 111 și la fel în linia a 6-a: 32 + 1 + 3 + 34 + 6 + 35 = 111.

— Ai văzut! Rămîne să găsești și alte permutări pe care le poți face între elementele de pe linie, sau încă pe coloane și să verifici ca toate sumele de pe linii și coloane să fie egale cu 111, după cum se întîmplă cu cele de pe diagonale. Nu uita că poți schimba chiar și elementele din noul pătrat care s-a format, numai să nu te atingi de elementele de pe diagonală.

— Așadar am rezolvat problema pătratelor magice! Drept să-ți spun că atunci cînd te-am poftit la o partidă de șah n-am bănuit că am să prind doi iepuri dintr-o lovitură!

— Te grăbești cu pronosticul! Al doilea iepure îi numai lovit dar încă nu l-ai prins! Cele cîteva lucruri pe care le-ai aflat despre pătratele magice trebuie să le privești numai ca o introducere. De-abia de aici înainte începe munca serioasă!

— Așa-i! Acum îmi amintesc că mi-ai pomenit la început de niște condiții suplimentare, puse de Fermat și de Frénicle...

— Ei vezi! Nu numai de ei, ci și de mulți alții. Uite, de pildă, pătratul magic care se găsește în cunoscuta gravură a lui Albrecht Dürer intitulată „Melancolia". Nu-i un simplu pătrat magic de ordinul patru, ci e calculat în așa fel încît pe ultima linie cele două numere alăturate din mijloc să arate anul cînd a fost executat tabloul: 15, 14 adică 1514. Să transcriem acest pătrat căci am să-ți mai arăt cîteva chițibușuri ce se cuprind în el:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

— Ei bine, ce altă taină mai cuprinde acest pătrat?

— Taina echilibrului! Dacă unești numerele 9 și 8 pe de o parte și 3 cu 14 pe de altă parte, observam că s-a format o cruce înclinată spre stînga. Numerele din vîrfurile ei opuse dau aceeași sumă: 9 + 8 = 3 + 14 = 17.

— Același lucru se petrece și cu numerele 5, 12, 2 și 15. Și ele formează vîrfurile altei cruci înclinate spre dreapta, iar suma acestor numere, luate două cîte două, este aceeași: 5 + 12 = 2 + 15 = 17.

— Și aceasta nu-i o simplă întîmplare ci un calcul dinainte ticluit?

— Nu te-am prevenit că am să-ți arăt ceva curios?

— Ba da, însă nu-mi vine să cred!

— Totuși este o proprietate specifică a pătratelor magice de ordinul patru. Ținînd seamă de ea, acestea se împart în două grupe distincte, după cum condiția aceasta de echilibru este îndeplinită sau nu-i îndeplinită! Acestea nu-s decît începutul! Ți-am spus că Fermat a trimis odată lui Mersenne un pătrat magic de ordinul 12 pe care nu-l terminase. El ar fi trebuit să fie de ordinul 22, construit în așa fel că, înlăturîndu-se pe rînd cîte o bandă, formată din numerele așezate pe cele 4 laturi ale marginii exterioare, pătratul care rămîne să fie tot magic. Această operație putîndu-se executa de 5 ori consecutiv, se ajungea la nucleul trimis de Fermat. Un asemenea pătrat a fost numit pătrat cu „incintă", cu „bordură" sau mai simplu putem să-i spunem cu „margine".

Află că acest pătrat a fost reconstituit mai tîrziu și, dacă te interesează, îl poți găsi în „Recreații matematice" de E. Lucas, vol. IV, p. 258.

— Mă interesează chiar foarte mult, căci îl găsesc formidabil! Are, în totul lui tot, 484 de numere în care sînt implicate atîtea condiții suplimentare! De fapt este un pătrat magic în care sînt condensate 6 pătrate magice. Unul așa de grozav nu mă încumet să fac, dar de încercat tot aș încerca unul mai ușurel! Să zicem unul de ordinul 6 pe care despuindu-l de margine să rămînă un pătrat magic de ordinul 4! Ce zici?

— La voia dumitale! Suflecă-ți mînecile și apucă-te de zidit! De cîte cărămizi ai nevoie?

— De 36! Probabil că vom folosi și de data aceasta proprietatea numerelor echidistante? Suma lor este $1 + 36 = 2 + 35 = 37$.

— Da. Și vom scrie toate numerele pe două rînduri, în așa fel, ca numerele echidistante să se afle unul sub altul.

— Nimic mai ușor. Scriu în prima linie numerele pînă la jumătate și mă întorc continuînd de la dreapta spre stînga:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18

36 35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 23 22 21 20 19

— Acum formăm pătratul de ordinul 4 luînd la întîmplare 8 perechi consecutive din cele 18 perechi pe care le-am scris. Să le punem într-un singur șir, în ordinea lor crescătoare. Iar ca să nu ne încurcăm prea mult cu pătratul de ordinul 4, pe care trebuie să-l construim cu aceste numere, eu zic să scriem sub ele numerele de la 1 la 16 și apoi să le înlocuim pe acestea în locul acelora din pătratul ce l-am construit mai înainte.

— Sau în pătratul lui Dürer!

— Fie și așa. Să alegem, de pildă, primele 8 perechi de numere:

(1)
1 2 3 4 5 6 7 8 29 30 31 32 33 34 35 36
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16

— Acum înlocuim în pătratul lui Dürer numerele din rîndul doi prin cele corespunzătoare din rîndul întîi:

36	3	2	33
5	30	31	8
29	6	7	32
4	35	34	1

— Oare a rămas în adevăr magic acest pătrat?

— Te mai îndoiești? Dacă privești atent șirurile (1) atunci observi că pe fiecare rînd, adică linie, coloană sau diagonală s-au introdus cîte două numere care diferă de cele din ordinea naturală cu 20, de pildă, în loc de 16 ai pus 36 și în loc de 13, 33. Așadar suma magică, în loc să fie 34, este 74. Ei, și acum, să-i facem în jurul acestui pătrat și un cerdac în care să poftim celelalte numere să stea la sfat!

— Sau să cocheteze cu cele din interior!

— Asta rămîne să hotărască ele, după ce le vom fi indicat locul potrivit. Întîi să vedem care va fi suma magică a noului pătrat?

— O știm: este 111!

— Iar suma magică a pătratului pe care l-am terminat este 74. Înseamnă că pe fiecare linie, coloană și diagonală trebuie folosite două dintre numerele rămase a căror sumă să fie $111 - 74 = 37$.

— Atunci vom folosi numai perechile de numere. Le pot lua oricum?

— Rămîne de văzut! Mai întîi să luăm două perechi și să le punem în cele patru colțuri, ca să completăm diagonalele, bineînțeles avînd grijă să distribuim cîte o pereche de fiecare diagonală. De pildă ultimele două perechi: 18, 19 și 17, 20.

— Acum să completăm liniile 1 și 6 și coloanele 1 și 6.

— Pentru aceasta trebuie să facem socoteala sumei magice:

linia 1: $111 - 35 = 76$ linia 6: $111 - 39 = 72$

coloana 1: $111 - 36 = 75$ coloana 6: $111 - 38 = 73$

— Atunci e foarte simplu, fiindcă 76 și cu 72 sînt și ele numere complementare și deci trebuie să aleg patru perechi, care să-mi dea dintr-o dată amîndouă combinațiile. Aceeași observație o am de făcut și în alegerea numerelor pentru coloane. Iată socoteala lor:

linia 1: $23 + 22 + 21 + 10 = 76$

linia 6: $14 + 15 + 16 + 27 = 72$

coloana 1: $11 + 12 + 28 + 24 = 75$

coloana 6: $26 + 25 + 9 + 13 = 73$

— Dacă ai să așezi numerele așa fel ca perechile să se afle în aceleași linii sau coloane, dorința ți-a fost satisfăcută!

17	23	22	21	10	18
11	36	3	2	33	26
12	5	30	31	8	25
28	29	6	7	32	9
24	4	35	34	1	13
19	14	15	16	27	20

— Pot să mă felicit! Și, mai ales îmi place că aș putea construi o întreagă serie de pătrate cu margine, de ordinul 6, fiindcă pot manevra cum vreau perechile de numere de la colțuri și chiar celelalte din primul pătrat! Acum, fiindcă pofta vine mîncînd, spune-mi cum ar trebui să procedez, dacă aș avea gust să-i mai pun o margine? Adică să am un pătrat magic de ordinul 8, cu 2 margini detașabile?

— Exact ca și în cazul pe care l-ai tratat. L-ai fi croit de la început cu $8 \times 8 = 64$ de numere, pe care le scriai perechi. Dintre acestea, alegeai întîi 8 perechi consecutive, și cu acestea formai pătratul de ordinul 4. După aceea,

din alte 10 perechi consecutive îți construiai prima margine, iar din cele 14 ce-ți mai rămîneau marginea a doua. Desigur că, de data aceasta, constantele magice erau altele, căci și suma a două numere perechi este $1 + 64 = 65$ și nu 37. Dar cazul nu este greu.

— Cred și eu! Dar dacă gustul mi-ar fi fost să obțin un pătrat de ordinul 5 cu bordură? Sau de ordinul 7, cu două incinte, ca să folosesc o dată și termenul franțuzesc pe care-l văd în cartea ta? Să nu-mi spui că pornesc de la pătratul de ordinul 3, și așa mai departe căci în acest caz, din cauza imparității, nu mai pot pune numerele echidistante în perechi.

— Dar de ce nu? Uiți că cele fără pereche intră în nucleu, adică în primul pătrat de ordinul 3? Celelalte numere ce rămîn sînt perechi. De pildă, dacă ar fi vorba de un pătrat de ordinul 5, iată cele 25 de numere:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

25 24 23 22 21 20 19 18 17 16 15 14

Pentru pătratul interior consideri numerele de la 9 la 17 și celelalte le ai pentru margine. Ar fi o sugestie, poți încerca și altfel! Dar fiindcă e vorba de un pătrat magic de ordin impar, să-ți arăt eu un altul, și mai și! Un pătrat magic în compartimente!

— În compartimente? Fiecare compartiment ce reprezintă? Un alt pătrat magic de ordin inferior?

— Da. Să presupunem că dorești să construiești un pătrat magic de ordinul 9. El are 9 linii și 9 coloane, deci ar putea fi considerat ca fiind format prin alipirea a 9 pătrate magice de ordinul 3.

— Cu alte cuvinte un pătrat magic de ordinul 3 în care elementele lui, în loc de a fi numere, sînt alte pătrate magice?

— Dacă vrei, da.

— Vreau eu, numai nu știu cum pot ajunge la el?

— Tabla lui Pitagora! $9 \times 9 = 81$! Cele 81 de numere de care dispui împarte-le în 9 grupe. Pentru simetrie să alegem rația fiecărei progresii aritmetice egală cu 9. În felul acesta, numerele corespunzătoare celor 9 pătrate sînt:

Pătratul 1: 1, 10, 19, 28, 37, 46, 55, 64, 73. $C_1 = 111$

Pătratul 2: 2, 11, 20, 29, 38, 47, 56, 65, 74. $C_2 = 114$

Pătratul 3: 3, 12, 21, 30, 39, 48, 57, 66, 75. $C_3 = 117$

Pătratul 4: 4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76. $C_4 = 120$

Pătratul 5: 5, 14, 23, 32, 41, 50, 59, 68, 77. $C_5 = 123$

Pătratul 6: 6, 15, 24, 33, 42, 51, 60, 69, 78. $C_6 = 126$

Pătratul 7: 7, 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70, 79. $C_7 = 129$

Pătratul 8: 8, 17, 26, 35, 44 53, 62, 71, 80. $C_8 = 132$

Pătratul 9: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81. $C_9 = 135$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

După cum vezi, în ultima linie am trecut numerele de la 1 la 9 și în dreapta fiecărui rînd am calculat constanta magică a pătratului respectiv.

— Ceea ce-mi place, îndeosebi, este că aceste constante formează și ele o progresie aritmetică cu rația 3! Așa că întîi și întîi am să scriu pătratul magic de ordinul 3, format cu aceste constante. Transcriu deci vechiul nostru pătrat!

— Poți proceda și așa. Dar în același timp, liniază și un pătrat de ordinul nouă pe care ai să-l umpli folosind deodată tabela ce ți-am scris-o și pătratul tău.

— Bine, te ascult. Scriu deci pătratul magic.

C_2	C_7	C_6
C_9	C_5	C_1
C_4	C_3	C_8

Constanta lui este 369 pe care am calculat-o și direct: $\frac{1+81}{2} \cdot 9$ și am verificat-o adunînd elementele unui rînd: $C_6 + C_1 + C_8 = 126 + 111 + 132 = 369$. În fine să scriu și pătratul magic cu compartimente!

11	56	47	16	61	52	15	60	51
74	38	2	79	43	7	78	42	6
29	20	65	34	25	70	33	24	69
18	63	54	14	59	50	10	55	46
81	45	9	77	41	5	73	37	1
36	27	72	32	23	68	28	19	64
13	58	49	12	57	48	17	62	53
76	40	4	75	39	3	80	44	8
31	22	67	30	21	66	35	26	71

— Îmi permit să te felicit! De data aceasta eu nu am contribuit cu nimic la formarea lui.

— Lasă modestia deoparte. Cine a scris tabloul pe care l-am folosit? Însă acum nu-i vorba de complimente, ci de ceva mai grav! Dacă ar fi să-mi vie un chef, ca să formez un pătrat magic cu compartimente de ordinul 8, ce mă fac? Fiindcă el trebuie descompus în 4 pătrate magice de ordinul 4, ori, după cum mi-ai atras atenția, cu 4 numere nu se poate face un pătrat magic! Atunci?

— Acuma-i grav de tot și știi de ce? Înseamnă că degeaba ne-am mai bătut capul pînă acum cu pătratele magice dacă

poți face o greșeală așa de... cum să-i zic, ca să nu te jignesc?

— Dacă am greșit așa de tare, zi-i grosolană! Nu văd însă unde am putut să mă înșel?

— Cînd ai afirmat că nu se poate construi un pătrat magic cu 4 numere!

— Tu singur ai spus-o și acum o negi?

— Am zis: cu patru numere diferite, nu în general cu 4 numere! Dacă numerele sînt egale, atunci pătratul este magic! N-am făcut oare comparația lor cu cele 4 elemente din antichitate?

— Ba da și recunosc că m-am prostit de-a binelea. Prin urmare, de data aceasta înseamnă că ar trebui să împart numerele în așa fel ca toate cele 4 pătrate să aibă aceeași constantă magică? Or, fiind vorba de un pătrat de ordin par, folosesc perechile echidistante, care au aceeași sumă și deci pot împărți cele 32 perechi de numere, în 4 serii de cîte 8 perechi consecutive! În acest caz, spre deosebire de cel precedent, se pot schimba pătratele parțiale între ele și proprietatea magică a pătratului întreg rămîne neschimbată!

— Atunci, drept recompensă, am să-ți spun cîteva cuvinte despre pătratele magice, cu care am început discuția: pătratele magice cu ordonare cavalerească. În acest caz, două numere consecutive din pătrat sînt așezate în așa fel ca ele să marcheze săritura calului.

— Pînă acum nu ai pus deloc accentul pe ordinea în care sînt așezate numerele. Am considerat important numai faptul că poziția lor este determinată de suma magică pe care trebuie să o realizeze.

— Da, pînă acum nu am avut ocazia să-ți spun că printre condițiile suplimentare ce se pot impune unor pătrate magice sînt și de acelea care impun o strictă ordonare, dinainte definită, a numerelor cu care se formează pătratul magic. De altfel acest lucru nu ți-e cu totul străin. Metoda lui Bachet introducea numerele în ordinea lor naturală,

pe linii paralele cu una dintre diagonale. Este ceea ce se numește ordonarea oblică a elementelor.

— Probabil că tot despre o ordonare oblică va trebui să fie vorba și în cazul drumului urmat de cal. Numai că iar se încurcă lucrurile!

— De ce?

— Șahul are 64 pătrățele, el ar corespunde unui pătrat magic de ordin par, pe cînd metoda lui Bachet se aplica numai la pătrate de ordin impar!

— Aici ai dreptate. Metoda se aplică pătratelor de ordin impar și numai acestora a fost aplicată ea din timpurile cele mai vechi, în India. Îți amintești, cred, că și pătratul magic cu distribuție cavalerească de ordinul 8 pe care ți l-am arătat eu nu îndeplinea condiția sumei magice decît pentru linii și coloane? Însă în cazul unui pătrat de ordin impar, metoda se află descrisă, fără a i se stabili și baza teoretică, chiar în lucrarea lui Moscopulos despre care ți-am vorbit. Iat-o ilustrată, pentru cazul unui pătrat de ordinul 7: „Se pune numărul 1 în căsuța din mijloc din linia întîi a pătratului și de-acolo se numără o căsuță la dreapta și apoi două în jos iar acolo se scrie numărul 2. Se procedează la fel mai departe pînă la marginea din dreapta. Atunci te urci pe coloană sus și mergi în continuare scriindu-l pe 5 începînd din stînga, primul loc din rîndul doi."

— Nu îmi este clar, de ce e așa?

— Ca să-ți fie clar ar trebui să cunoști și regula de formare a pătratelor cu ordonare oblică, acesta fiind doar un caz particular ale acelora. Sîntem însă prea obosiți ca să insist mai mult. Am să adaug numai că Moscopulos indică și cazul cînd găsește cîmpul ocupat. Atunci, spune el, cobori cu patru locuri în jos pe coloană, de la ultimul număr fixat. Cînd ai ajuns la rîndul de jos, urci pînă sus în coloana din dreapta, cu un loc mai jos. Dar dacă ai atins marginea din dreapta, atunci începi din marginea stîngă. De aceea numărul 5 este în locul prim din linia a doua. Ca să te descurci, tu singur, îți transcriu pătratul de ordinul 7, așa cum l-a dat el:

38	14	32	1	26	44	20
5	23	48	17	42	11	29
21	39	8	33	2	27	45
30	6	24	49	18	36	12
46	15	40	9	34	3	28
13	31	7	25	43	19	37
22	47	16	41	10	35	4.

Căci, drept să-ți spun, dacă ne-am potrivi, nu terminăm nici într-o săptămînă, numai ca să analizăm pe rînd ordonarea cavalieră cu toate variantele ei! Fiindcă în cazul unui pătrat de ordinul n (impar) se poate considera și un mers al calului cu o coborîre de 3, 4 sau (n—2) căsuțe în loc de 2! Sau, dacă ar fi să-ți mai amintesc despre pătratele diabolice...

— Cum mai sînt și acelea?

— Construite în așa fel că, dacă tai o bucată din ele, după o paralelă la una dintre coloane, și lipești în partea stîngă a pătratului bucata care ai luat-o din dreapta, pătratul ce se formează să fie tot magic! Dar nici cu asta nu am termina! Există parchete magice, poligoane magice, cercuri magice, cuburi magice...

— E și de înțeles! Jocul cu ele este odihnitor, iar, după o zi de muncă încordată, ele îți oferă o destindere tot așa de îmbietoare ca și muzica. Te fură, pur și simplu! Pe mine, știu bine că m-au prins în vraja lor, și dacă îmi vor mai trebui lămuriri, să știi că-ți scriu, ca să mi le dai!

PROBLEMA INTUIȚIEI SPAȚIALE

sau

Geometria cu patru dimensiuni

— Iar am uitat pe undeva o mănușă, am observat, scotocind în buzunare după cheie, ca să descui ușa.

— Și care mănușă ai pierdut-o acum? m-a întrebat prietenul meu Teodor Solonar, după ce am intrat în casă. Știu că la Cîmpulung ai pierdut mănușa dreaptă.

— Și acum tot pe cea dreaptă am pierdut-o, așa că nu-i rost de împerecherea celor două rămase.

— Ba ar fi, dacă te-ai putea deplasa în spațiul cu patru dimensiuni, a ripostat Teodor Solonar cu multă seriozitate.

— Cu ce fel de scamatorie vrei să mă îmbeți, ca să-mi treacă ciuda?

— Nu-i nici o scamatorie ci un fapt cît se poate de obișnuit pentru ființele care trăiesc într-un spațiu cu patru dimensiuni! Uite, dă-mi mănușa pe care o mai ai și hai cu mine la oglindă.

— Poftim.

— Acum privește mănușa în oglindă și spune-mi pe care o vezi?

— În oglindă văd mănușa care mi-ar prinde foarte bine. Cred că n-ai de gînd să mă sfătuiești să sparg oglinda ca să-mi iau mănușa dreaptă?

— Nu, dar dacă ai fi în spațiul cu patru dimensiuni, o simplă rotație a mănușii în jurul planului oglinzii ar fi

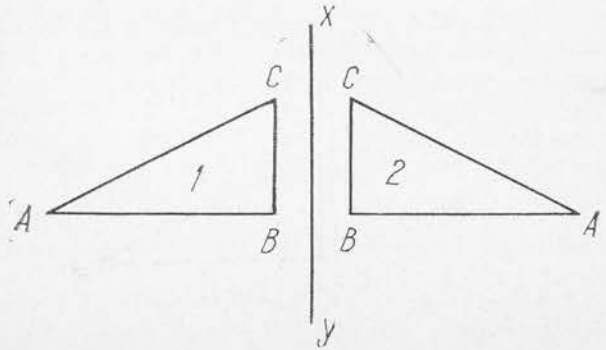
în stare să schimbe pe una în cealaltă și atunci în loc de două mănuși de la mîna stîngă ai avea o pereche!

— N-am spus eu că umbli să mă îmbeți cu apă chioară! N-am mai auzit pînă acum că s-ar putea face o rotație în jurul unui plan. În jurul unui punct da, în jurul unei axe, iarăși da, dar în jurul unui plan? Dacă-mi închipui planul infinit, el desparte spațiul în care ne aflăm în două părți fără nici o portiță de trecere de la una la alta! Și atunci, cum vrei să rotesc mănușa? Doar spărgînd oglinda, așa cum ți-am spus mai înainte!

— Drept să-ți spun, nu m-am așteptat la atîta dîrzenie din partea intuiției tale spațiale!

— De ce? Oare spațiul meu, spațiul în care m-am născut și trăiesc, nu are trei dimensiuni: lungime, lățime și înălțime? Unde-i a patra?

— A patra dimensiune, ca și mănușa ta pierdută, se află undeva! Ca să te fac să o înțelegi, și să nu mă mai învinuiești de scamatorie și mai știu eu ce, am să recurg la o analogie. Dă-mi, te rog, o foaie de hîrtie, un creion și un foarfece. Desenez un triunghi dreptunghic ABC, duc și dreapta xy pe care voi considera-o axă de simetrie, față de care vreau să mai desenez al doilea triunghi ABC. Ca să nu mă mai obosesc prea mult, tai din hîrtie un triunghi egal cu ABC și îl așez, întors de cealaltă parte a axei xy (fig. 16). În planul hîrtiei putem presupune că aceste două triunghiuri



corespund celor două mănuși din spațiu admițînd că linia xy ține locul oglinzii.

— Cum adică?

— Adică așa: triunghiurile 1 și 2 sînt simetrice față de xy. Dacă mișc oricum triunghiul 2, în planul hîrtiei nu voi reuși să-l fac să coincidă cu triunghiul 1, așa după cum nu coincid nici mănușile perechi. De pildă, dacă suprapun BC peste BC, cealaltă catetă AB vine în prelungire (fig. 17).

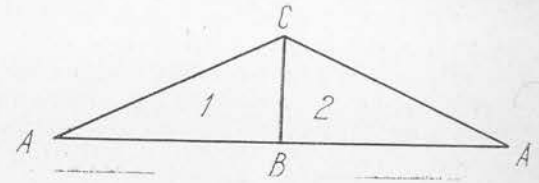


Fig. 17

Fie atunci triunghiul 2 mănușa dreaptă și 1 — cea stîngă. Dar dacă, în locul triunghiului 2, aduc alt triunghi 1? În acest caz suprapunerea este posibilă. În schimb, nu se mai poate regăsi triunghiul simetric 2, prin nici un fel de mișcare în planul figurii. Așezîndu-l în poziția de simetrie față de xy se obține acum un triunghi nesimetric cu el (fig. 18).

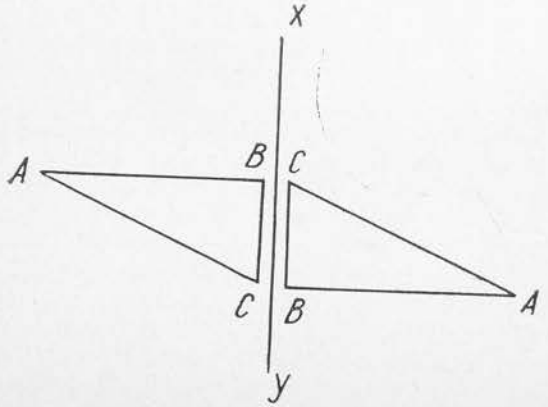


Fig. 18

— E și natural căci tu nu ai mai făcut rotația în jurul axei xy, ci o translație și o rotație plană, în jurul unui punct. Rămînînd în planul figurii, nu vei mai avea niciodată posibilitatea să dispui ca cele două triunghiuri egale să se prefacă în două triunghiuri perechi sau simetrice.

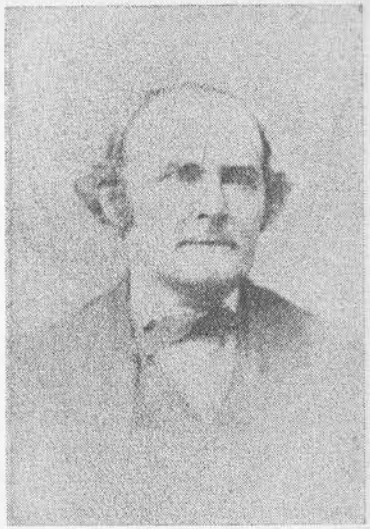
— Exact! Ca să le ai, trebuie să iei unul dintre triunghiurile 1 și să-l ridici în spațiul cu 3 dimensiuni. Observă bine evenimentul: — ridicîndu-l, triunghiul 1 dispare din plan. El se rotește, de data aceasta, în jurul axei xy și apare din nou în plan, dar după ce a fost întors în spațiu. Repet observația ta, că axa xy împărțea planul în două părți și triunghiul 1 nu se putea roti în jurul ei rămînînd în plan, dar dacă folosești o nouă dimensiune, care nu-i cuprinsă în plan, atunci rotația devine posibilă! Cred că nu am făcut nici o scamatorie și nici nu te-am îmbătat cu apă chioară, ce spui?

— Nu și totuși da! Nu, pentru că e adevărat și am înțeles foarte bine că existența figurilor simetrice din plan cere — sau implică — pentru a realiza suprapunerea lor, o rotație a lor în spațiul cu 3 dimensiuni. Însă, aici intervine scamatoria!

— De ce?

— Pentru că dacă figura este plană, ea nu are decît două dimensiuni, ori triunghiul tău de hîrtie, oricît de fină ar fi foaia din care a fost tăiat, are trei dimensiuni, are o grosime infinitezimală, dacă vrei, însă o are, pe cînd mănușa mea nu are nici un fel de grosime corespunzătoare unei a patra dimensiuni! Și, întorcînd-o pe dos, ca pe triunghi, am o mănușă întoarsă, dar nu pe aceea care-mi lipsește!

— Mai întîi, nu trebuie să excluzi, cu atîta siguranță, existența unei infinitezimale grosimi de dimensiunea a patra, dar lăsăm aceasta deocamdată la o parte, căci vom mai avea prilej să ne ciondănim asupra acestei ipoteze. Cît privește întoarcerea mănușii tale pe dos, nu mă aștept am să-ți treacă prin gînd așa ceva! Probabil că te-a luat gura pe dinainte. A întoarce mănușa pe dos, înseamnă să faci exact ceea ce ai făcut cînd ai avut cele două triunghiuri 1 și ai încercat să le suprapui, rămînînd în plan! Nu-i vorba de întoarcerea ei pe dos, ci de întoarcerea ei printr-o rotație



Arthur Cayley

executată în spațiul cu patru dimensiuni și apoi aducerea din nou, în spațiul cu trei dimensiuni, sub forma ei simetrică!

— Am înțeles eu procesul de transformare și chiar procedeul, datorită analogiei care mi-ai făcut-o, numai că pe mine, dacă nu întorc mănușa, numai prăvălia din str. Lăpușneanu mă va scoate din încurcătură! De aceea întîi dă-mi voie să fierb o cafea și apoi te-aș ruga să forfecăm spațiul cela cu 4 dimensiuni. Poate că așa voi avea norocul să aud ceva și despre teoria relativității, căci pînă acum nu m-ai învrednicit niciodată cu vreo aluzie asupra ei!

— Și zici că nu te-am învrednicit cu nici o vorbuliță despre teoria relativității? a prins a rîde Teodor Solonar, după ce a sorbit cîteva înghițituri din cafea. Nu știu dacă și azi i-a venit vremea!... Să nu crezi că o discuție asupra spațiului cu patru dimensiuni aduce cu sine și teoria lui Einstein. Prima problemă este mult mai veche. Încă din 1843, matematicianul englez Arthur Cayley, atunci în vîrstă de 22 de ani, a ajuns la concepția unei geometrii, nu numai cu 4 dar chiar cu n dimensiuni! Un an mai tîrziu el

Joseph
Louis Lagrange

publica un articol în care extindea cîteva teoreme din spațiul cu trei dimensiuni la spațiul cu 4 dimensiuni. Dar chiar și mai înainte, Joseph Louis Lagrange, în Mecanica analitică pe care a publicat-o în 1788 la Paris, observa că mecanica poate fi considerată ca o geometrie în spațiul cu patru dimensiuni, fiindcă, motiva el, poziția unui punct material în mișcare este perfect determinată de cele trei coordonate carteziene (lungimea, lățimea și înălțimea lui față de planele de reper) și timp, care apare ca a patra coordonată. Or, trebuie să știi că Lagrange nu a fost un geometru ci un analist. În prefața Mecanicii, despre care ți-am vorbit, se laudă cu faptul că în lucrarea lui nu se găsește nici o figură! Așadar pentru Lagrange, ca și pentru ceilalți matematicieni, problema ia aspectul unei analogii formale, în sensul că

dacă în spațiul cu 3 dimensiuni poziția unui punct este precizată prin cele 3 coordonate carteziene ale sale care, după cum știi, reprezintă distanțele punctului la cele 3 plane de coordonate, perpendiculare două cîte două între ele, atunci într-un spațiu n — dimensional, poziția punctului se determină prin n coordonate...

— Față de cine, mă rog?

— Recunosc că întrebarea ta e gravă și nu-ți pot răspunde cu aceeași dezinvoltură de pînă acum. Nu ne putem închipui cum arată sistemul de coordonate format nici de 4 și nici de n plane perpendiculare două cîte două între ele, dar formal, îi putem admite existența. De aceea fără să ne oprim prea mult asupra acestei neputințe, definim distanța dintre două puncte $A(x_1, x_2 \dots x_n)$ și $B(y_1, y_2 \dots y_n)$ din acest spațiu (n — dimensional) printr-o formulă analoagă aceleia din spațiul cu două sau cu trei dimensiuni:

$$d = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots (x_n - y_n)^2}.$$

Cu ajutorul noțiunii de distanță dintre două puncte, pot fi transpuse și celelalte noțiuni din geometria spațiului cu 3 dimensiuni, ca lungime unghi, arie, volum etc. în spațiul cu n dimensiuni.

— Toate-s foarte frumoase, dar, după modesta mea părere, spiritul omenesc nu poate concepe spațiul cu patru dimensiuni și ca atare nici geometria cu patru dimensiuni.

— Nu sînt de părerea ta, dar eu ca eu, cuvîntul meu să zicem că nu are greutate. Îți voi opune însă geometri ca Plucker, cel care a întrevăzut deodată cu Cayley geometriile multidimensionale, — deși a scris despre ele mai tîrziu, — și apoi, pe Poincaré. Poincaré merge chiar mult mai departe. În unul dintre articolele publicate postum, în volumul „Dernières Pensées": „De ce spațiul are trei dimensiuni", exprimă părerea că noi avem în noi intuiția unui spațiu cu mai multe dimensiuni, tocmai pentru că avem facultatea de a construi un asemenea continuu fizic și matematic. Însă această intuiție ar cere o atenție cu mult mai susținută pentru a fi dezvoltată decît aceea geometrică

Plucker

obișnuită. Nu vedem noi, spune el, elevi care se descurcă foarte bine în geometria plană, dar nu văd deloc în spațiu? Aceasta nu din cauză că nu ar avea intuiția spațiului cu trei dimensiuni, dar nu au căpătat obișnuința de a se folosi de ea, n-au făcut destulă sforțare de a reprezenta figurile din spațiu în desenul plan.

— În această privință, îi dau dreptate și-mi aduc aminte de o discuție de a noastră de mai de demult. Mi-ai desenat un cerc și cu cele două tangente exterioare duse dintr-un punct T (fig. 19), adică o figură plană. Cînd m-ai întrebat

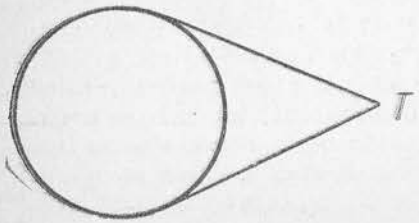


Fig. 19

ce văd, ți-am răspuns: „un con". Știu că ai făcut mult haz de asta, dar ce să fac, pentru mine era con.

— Da, pentru tine, fiindcă tu ai făcut geometrie în spațiu și ochiul îți era deprins cu această imagine. Dar dacă, în locul tău, ar fi privit figura cineva care n-ar fi văzut niciodată un con și nici desenul lui, ar fi spus că e un cerc și cele două tangente duse din T! Ei bine, Poincaré insistă că intuiția spațiului cu patru sau mai multe dimensiuni este îngreuiată nu numai de lipsa de obișnuință, dar și de faptul că prin introducerea unei noi dimensiuni apar complicații foarte mari în forma figurilor. Despre aceasta ai să ai posibilitatea să te convingi singur mai tîrziu. Acum, aș vrea să-ți prezint teza contrară, adică să te familiarizez cu această noțiune de spațiu n — dimensional care încă te sperie. Am să încep prin a-ți înfățișa un spațiu chiar cu trei dimensiuni, dar mai puțin obișnuit. Imaginează-ți toate cercurile ce se pot desena într-un plan dat. Află că totalitatea acestor cercuri formează un spațiu cu trei dimensiuni.

— Cum să fie spațiu cu trei dimensiuni atîta vreme cît am desenat cercuri plane? Oricîte cercuri aș desena, chiar o infinitate, ele nu ies din planul hîrtiei, așa că spațiul are numai două dimensiuni!

— Nu-i vorba aici de planul pe care ai desenat tu, ci de altceva, anume de mulțimea cercurilor obținute. Această mulțime de figuri plane formează, în totalitatea lor, un spațiu cu trei dimensiuni, și iată de ce: Oricare dintre aceste cercuri este determinat prin trei numere, adică trei coordonate, cele două coordonate ale centrului și raza. Așadar, fiecare cerc poate fi reprezentat ca un punct într-un spațiu cu 3 dimensiuni, și fiind vorba de o infinitate de puncte, acestea umplu întreg spațiul cu trei dimensiuni, de deasupra planului xoy, R fiind pozitiv.

— La asta nu m-am așteptat! Exemplul este ingenios. Dacă te imit pe tine, pot să vorbesc de spațiul cu patru dimensiuni ca format din totalitatea sferelor din spațiu cu trei dimensiuni! Fiecare sferă este definită de patru numere: cele trei coordonate ale centrului și raza, deci

aceste 4 numere le pot considera ca fiind coordonatele unui punct din spațiul cu 4 dimensiuni!

— Așadar, sîntem pe punctul de încetare a ostilităților?

— Încă nu, nu știu ce surprize mă mai pot întîmpina! Dar dacă te ții încă pe aici, pe aproape...

— Uite, să ne deplasăm într-o uzină metalurgică. Se experimentează acolo un aliaj din trei metale deosebite. Starea amestecului este determinată de temperatură: t, presiune: p, și concentrarea procentuală a două dintre cele 3 metale, fie ele c_1 și c_2. Concentrarea celui de al treilea apare evident prin diferență. $100 - c_1 - c_2$. Starea acestui amestec este definită deci prin patru parametri...

— Așadar această stare reprezintă un punct în spațiul cu 4 dimensiuni?

— Exact. Și metoda are un mare avantaj, căci, folosind spațiul cu 4 dimensiuni, eliminăm folosirea diagramelor obișnuite în care nu pot fi legate decît cîte două variabile între ele. Metoda este întrebuințată pe scară largă în multe laboratoare și uzine de la noi, ca să nu mai vorbesc despre acelea din America, U.R.S.S. etc. Și acum să revenim la o altă imagine, de data aceasta geometrică, a spațiului cu patru dimensiuni. O dreaptă în spațiu este definită prin patru numere. Așadar dacă poți să intuiești spațiul ce se naște, cînd prin fiecare punct din spațiul cu trei dimensiuni trece un snop format dintr-o infinitate de drepte infinite, atunci ai realizat imaginea cosmică a spațiului cu patru dimensiuni.

— Nu, așa ceva, nu-mi poate trece prin fața ochilor și, drept să-ți spun că mă și tem să mă concentrez prea mult asupra acestui gînd, cum mă tem să mă uit prea multă vreme în adîncul unei prăpăstii!

— Nu te pot opri să te comporți așa, căci sînt și unii matematicieni care au afirmat că nimeni, decît niște nebuni, și-ar putea reprezenta un spațiu cu 4 dimensiuni.

— Bravo lor! Au dreptate, deși mă tem că tu nu ești de părerea mea!

— Începînd cu sfîrșitul veacului trecut, s-au scris multe lucrări în acest domeniu, atît de matematicieni cît și de

oameni de litere, despre care nimic nu mă îndreptățește să-i consider nebuni numai fiindcă au dovedit o adevărată pasiune pentru această lume! Profesorul C.H. Hinton, de pildă, a compus o carte intitulată „A patra dimensiune", pe care a publicat-o în 1904. Ea a stîrnit atîta interes și curiozitate că în curînd a fost epuizată și peste doi ani a apărut ediția a doua, peste 6 ani ediția a treia, apoi a patra. Și totuși aceasta era o carte dedicată unui public mai restrîns de cititori. Dar înaintea lui Hinton a atacat această problemă marele Wells! „Mașina timpului" a fost scrisă în 1895, exact cu 10 ani înainte ca Einstein să-și fi publicat teoria relativității restrînse! Dar nu numai în „Mașina timpului", operă de tinerețe, punea Wells problema spațiului cu 4 dimensiuni, ci și în „Oameni ca zeii", roman scris cu 40 de ani mai tîrziu. El a dovedit, prin această revenire, că spațiul cu patru dimensiuni îi era lui așa de familiar, încît nu ezita să-l aleagă drept cadru în care avea să se desfășoare povestea.

— „Mașina timpului"? Am citit cartea pe cînd eram elev dar, după cîte mi-aduc eu aminte, acțiunea se petrecea în lumea din spațiul nostru normal, lume în care exploratorul timpului a pătruns cu mașina pe care și-a construit-o! Fantasticul se arăta nu în etalarea spațiului cu patru dimensiuni, ci în felul cum se transformase lumea, după nu știu cîte mii de ani...

— Am să-ți spun eu. Wells își conduce eroul în anul 802 701.

— Prin urmare, recunoști și tu că nu-i vorba de a 4-a dimensiune, ci de timp, așa cum sună și titlul romanului!

— Nu recunosc nimic! Problema spațiului cu patru dimensiuni este pusă în primele două-trei pagini pe care tu, ca elev, nici nu le-ai sesizat, curios, cum sînt sigur că erai pe atunci, ca să ajungi la miezul acțiunii. Și după ce intriga te-a înlănțuit, te-a copleșit mai mult soarta Weenei decît procedeul prin care exploratorul timpului a pătruns în acea lume sau s-a întors la el acasă.

— Protestez! Mi-aduc aminte foarte bine: s-a suit în mașina timpului, a prins cele două manete, a apăsat pe

un șurub și a pornit. Oare știu cum procedează Făt-Frumos cînd se suie pe calul lui năzdrăvan și pornește în spațiu după zmeul cel hain?

— Strașnică apropiere! Așa ceva nu mi-a trecut niciodată prin gînd, dar asemănarea e cît se poate de nimerită, căci Făt-Frumos aplică, în mod intuitiv, ceea ce Exploratorul timpului o făcea deliberat.

— Ce anume?

— Rezolvarea problemei spațiu-timp! În 1962 Editura Tineretului a dat o nouă traducere a romanului lui Wells; eu sînt în avantaj față de tine căci l-am recitit de puțină vreme.

— Stai, am cumpărat și eu cartea numai că n-am citit-o, deși intenționam. Dacă ai vrea, mi-ai putea citi paginile acelea despre care mi-ai vorbit, poate că, prin tine, le voi pricepe altfel!

— Bine, cu condiția ca să-ți citesc pe sărite numai ceea ce este în strînsă legătură cu tema noastră. Nu știu dacă mai reții că Introducerea este o discuție între exploratorul timpului și niște prieteni, cărora vrea să le prezinte mașina. Lor li se adresează, în felul în care încep să-ți citesc:

„Știți desigur că o linie geometrică, o linie de grosime zero, nu are existență reală... La fel și planul geometric. Lucrurile acestea sînt simple abstracțiuni... tot astfel, avînd numai lungime, lățime și înălțime, un cub nu poate avea o existență reală.

— Aici am o obiecție, zise Filby. Un corp solid poate să existe în mod cert. Toate obiectele reale...

— Așa crede majoritatea oamenilor. Dar așteptați o clipă. Poate să existe un cub în mod instantaneu?

— Nu înțeleg, zise Filby.

— Este cu putință ca un cub, care nu are nici un fel de durată în timp, să aibă o existență reală?

Filby căzu pe gînduri.

— E limpede, continuă exploratorul timpului, orice corp real trebuie să se întindă în patru direcții: trebuie să aibă lungime, lățime, înălțime și durată... Există în

realitate patru dimensiuni: trei pe care le numim cele trei planuri ale spațiului și a patra: Timpul. Există totuși și tendința de a stabili o distincție artificială între primele trei dimensiuni și ultima, deoarece... conștiința noastră se mișcă de-a lungul ultimei dimensiuni într-o singură direcție, de la începutul pînă la sfîrșitul vieții..."

— Iartă-mă că te întrerup din lectură, dar țin să accentuez că observația asta e foarte hazardată. Nu pot admite ca timpul să fie privit ca o dimensiune spațială!

— N-ai decît. Wells însă, adică exploratorul timpului, e de altă părere: „Nu există nici o deosebire între Timp și oricare dintre celelalte trei dimensiuni ale Spațiului, decît doar că de-a lungul timpului se mișcă mereu conștiința noastră... Oamenii de știință știu foarte bine că timpul nu este decît un fel de spațiu. Iată o diagramă simplă, o înregistrare a mersului vremii. Linia aceasta pe care o urmăresc cu degetul, arată mișcarea barometrului... Este sigur că Mercurul nu a trasat această linie în nici una dintre dimensiunile general recunoscute ale spațiului... și trebuie să tragem concluzia că ea a fost trasată de-a lungul dimensiunii Timp.

— Dar, zise medicul... dacă timpul este în adevăr numai o a patra dimensiune a spațiului... de ce nu ne putem mișca în timp, așa cum ne mișcăm în celelalte dimensiuni ale spațiului..."

— Ei vezi, măi Toa! Doctorul este de părerea mea! Să vedem, ce scrie mai departe?

— Ai să o vezi tu singur, cînd ai să citești cartea. Eu mă opresc aici și te poftesc să mă urmezi pe cărăruia care ți-oi arăta-o eu, chiar dacă lumea în care te duc ți-ar părea mai fantastică decît aceea a lui Wells. Să zicem că lumea, adică pămîntul și atmosfera înconjurătoare în care am trăi noi, sau dacă vrei, niște buburuzi minusculi dotați exact cu aceeași inteligență și simțire ca a noastră, s-ar reduce la un fir, în forma unui cerc extrem de subțire, dar suficient de dur ca să nu se întindă, să se deformeze sau să se rupă. Ca analogia să fie perfectă, să admitem că s-ar păstra proporțiile care există între mărimea noastră față de dimen-

siunile pămîntului nostru, și a lor față de cerc în așa fel că buburuzii, care nu se pot mișca decît pe acest cerc, să aibă impresia că se mișcă pe o linie dreaptă. Prin urmare acești buburuzi nu au decît lungime și nu cunosc altă dimensiune decît lungimea. Chiar și atmosfera lor este cuprinsă în unica dimensiune, accesibilă lor: lungimea. Să admitem că acest cerc se rotește în jurul centrului său și, în același timp, are o mișcare de translație în spațiu, despre care buburuzii au aflat, în decursul vremii, deși nu și-o pot imagina. Mișcarea lor ca și aceste mișcări ale pămîntului lor le-au dat posibilitatea să-și însușească noțiunea de timp, și să stabilească o măsură a timpului, după cum și-au stabilit și o geometrie uni-dimensională exact ca a noastră. Ca și noi, ei au observat că timpul este ireversibil.

— Bine, dar acești buburuzi nu au posibilitatea să comunice direct, decît cu încă doi, cu cel din dreapta și cu cel din stînga.

— Poate că tocmai din cauza aceasta au avut mai mult răgaz decît noi, ceea ce ne face să admitem că au descoperit și un sistem propriu de telecomunicație! După sute și sute de secole de gîndire, un Wells-buburuz, convins că timpul înseamnă o nouă dimensiune a spațiului său, va fi compus același roman fantastic: „Mașina timpului". Cu ea, eroul său dispare din spațiu, ca și cum ar trece prin materie, cercetează lumea din anul 802 701 și apoi se întoarce la prietenii săi și le spune ce-a văzut. Le povestește tot ce a văzut dar nu-i poate face să înțeleagă cum a mers. De altfel nici el singur nu-și poate preciza direcția, deși o stăpînește. Buburuzii lui n-au să-l înțeleagă, fiindcă ei nu pot, dar tu și cu mine putem. Hai să-l urmărim: Să considerăm un sistem de două axe perpendiculare xot (fig. 20) unde prin x'x notăm axa spațiului și prin t't axa timpului. Buburuzii se pot mișca oricum pe axa x'x, într-un sens sau în celălalt, dar ei sînt incapabili să înțeleagă că există și altă posibilitate de mișcare. Simțul lor de orientare nu are altă dispoziție decît aceea de a percepe o singură dimensiune: lungimea. Însă, fără să înțeleagă cum, ei bănuiesc că pămîntul, sau lumea lor x'x, se deplasează în direcția

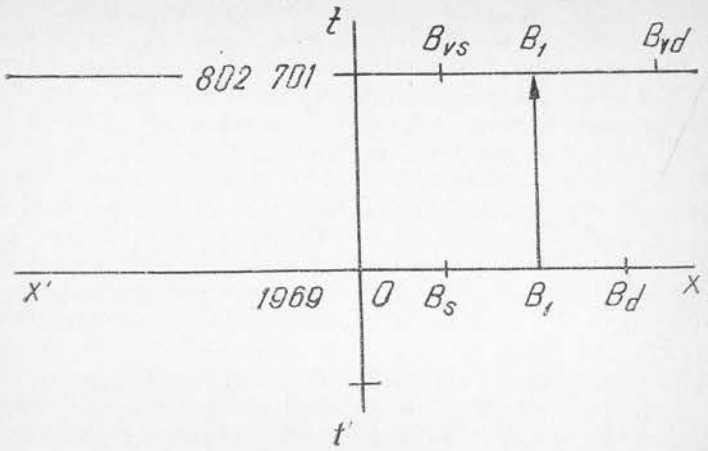


Fig. 20

ot și de aceea au impresia că, rămînînd pe loc, ei îmbătrînesc, adică anii trec, fără ca ei să poată reveni în trecut. Și acum iată-l pe exploratorul timpului — buburuzul B_1 — stînd de vorbă cu prietenii lui B_s și B_d, apoi, nici una nici două, bîzîie, își întinde aripioarele și a dispărut. Atunci B_s și B_d se văd pentru întîia oară în viața lor la față și se minunează amîndoi de această întîmplare extraordinară care contrazice legea conservării materiei! B_1 a dispărut din lumea lor, nimeni nu-l mai vede, locul ocupat de el este gol și nu-i o iluzie fiindcă, prin această întîmplare, B_s a reușit să se întîlnească cu B_d, fapt care nu s-a întîmplat niciodată de cînd există lumea lor! În realitate, B_1 după ce s-a desprins din spațiul lui, a mers de-a lungul axei t't, în sus pînă în dreptul anului 802 701. Acolo a oprit motorul, și-a strîns aripioarele și s-a oprit între alți doi buburuzi din viitor B_{vs} și B_{vd}. La fel de mare a fost mirarea acestor doi vecini cînd ei nu s-au mai putut vedea la față și, din senin, a apărut între ei un buburuz viu, în carne și oase! După peripețiile de rigoare, atunci cînd ar fi fost să fie prins, el a zbughit-o înapoi apărînd tot așa

de neprevăzut după cum și dispăruse între B_8 și B_4. Pentru aceasta n-a avut decît să se îndrepte de unde era, în direcția paralelă cu t't pînă la t = 1969, cînd a întîlnit lumea sa. Acum cred că nu mai este pentru tine nici o greutate să admiți că ar fi putut tot așa de bine să se întoarcă și în trecut. N-avea decît să o pornească în direcție contrară și să se oprească la un t = — 10 000 000 ani, de pildă! Apoi să se întoarcă în 1969 pornind în direcția pozitivă a axei t't. Pentru noi, care avem imaginea clară a planului, adică a spațiului cu două dimensiuni, totul pare explicabil. Mai mult, putem concepe pluralitatea lumilor unidimensionale, cufundate sau împrăștiate în spațiul bidimensional, despre care buburuzii noștri să n-aibă habar decît dacă una dintre aceste lumi s-ar intersecta cu a lor. În acest caz, s-ar putea să ajungă și ei la ideea unui voiaj, în acea lume.

Deși noi vedem clar că trecerea se face pășind în spațiul cu două dimensiuni ei nu ar interpreta-o așa! Ei ar avea de făcut numai o schimbare de direcție, ceea ce ar putea fi considerat ca o învingere a cîmpului gravitațional, după care drumul s-ar continua tot pe o singură dimensiune, fără să intervină deloc alta! Și acum să ne emancipăm și să ne ocupăm de alte gîngănii cugetătoare cu mai multă libertate de mișcare, trăind pe un pămînt exact ca al nostru și în condiții ca ale noastre însă, neștiind ce este a treia dimensiune adică, ce înseamnă în sus și în jos. Ar fi ființe care trăiesc în două dimensiuni și sistemul lor de gîndire s-ar fi plămădit în aceste condiții speciale. Deși pămîntul este sferic, din cauza dimensiunilor lor reduse, local, el le apare, exact ca și nouă, plan. Geometria pe care au stabilit-o ei este geometria noastră plană. Spre deosebire de frații lor buburuzi, aceste gîngănii se pot întîlni în grupe oricît de mari, și-au făcut case, bineînțeles bidimensionale și, odată închiși între cei patru pereți ai lor, sînt convinși că nimeni nu poate să intre înăuntru nici să plece în afară. Știu ce este rotația în jurul unui punct și cunosc simetria față de un punct dar și față de o dreaptă. În ultimul caz, ei sînt convinși că două figuri simetrice

față de o dreaptă sînt egale, dar nu pot fi suprapuse. Acum, să presupunem că noi doi am privi aievea la aceste gîngănii și vrem să le atragem atenția asupra noastră. Ei nu ne văd și nu ne vor putea vedea niciodată fiindcă organele lor de vedere sînt adaptate numai la spațiul cu două dimensiuni și noi sîntem în spațiul cu 3 dimensiuni; dar ei văd urma pe care o lăsăm în planul lor, atunci cînd așezăm un deget, sau un obiect în preajma lor. De pildă, uite camera ABCD (fig. 21) unde să presupunem că o familie stă la masă: tata T, mama M și doi copii C_1 și C_2. Noi ne uităm la ei pe deasupra, adică prin dimensiunea a 3-a și ne apropiem chiar foarte mult de planul hîrtiei unde își au ei domiciliul, dar ei habar n-au. Ei sînt convinși că nimeni nu-i poate vedea fiindcă ușile și ferestrele lor sînt închise. Acum, deodată tu apuci cu două degete pe unul dintre copii și îl ridici ușor în dimensiunea a treia. Privește ce groază s-a întipărit pe fața celorlalți! Ușile erau închise, nu au văzut pe nimeni, nici acum nimic nu s-a schimbat și totuși s-a făcut un nour în jurul lui C_2 și el a dispărut. Unde? Nimeni nu știe, fiindcă el nu se mai vede! Pe copil îl ții în palmă. El nu te vede, el vede numai pielea palmei, liniile din palmă, sau dacă îl pui pe masă se va plimba pe ea fără să știe unde se află și că fața de masă este o parte dintr-o mobilă mai complicată fără să poată vedea camera noastră în întregimea ei. Acuma îl duci înapoi exact așa cum l-ai și luat. Cînd stau triști în jurul mesei, întrebîndu-se mereu ce a putut să fie cu C_2, deodată, tot așa de neînțeles, fără să deschizi vreo ușă sau fereastră,

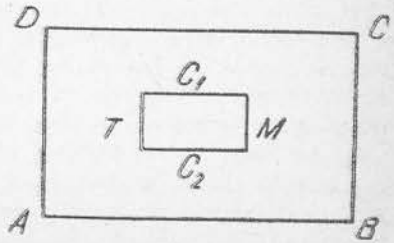


Fig. 21

intri pe deasupra camerei lor și le înapoiezi copilul, vesel și nevătămat! Ai violat, pentru ei, cele mai sigure legi din fizică: legea conservării materiei, căci ai făcut să dispară și să apară materia, legea nepenetrabilității materiei solide, căci, neintrînd pe ușă, rezultă că ai pătruns prin pereți ca și cum pereții nu ar exista.

— În adevăr, dacă ei nu au noțiunea de sus și jos, nu-și pot imagina că eu am intrat la ei în casă, în modul cel mai simplu și natural cu putință, adică pe deasupra, prin a treia dimensiune. Și iar, înțeleg că C_2 nu va fi în stare să le explice ce s-a întîmplat cu el, oricît de precoce ar fi.

— Am putea să le mai facem o bucurie acestor părinți pe care i-am necăjit destul. Vezi, și C_1 e un copil distrat ca și tine și pierde mereu mănușa stîngă. Uite acolo în colț sînt două mănuși de pe aceeași mînă. Hai să luăm una dintre ele, să o învîrtim în spațiul nostru și să o punem înapoi. S-a făcut. Privește stupoarea tuturor celor din casă! Dar iată că ușa se deschide și vine în vizită un bun prieten al familiei, un mare matematician. Tatăl îi arată noua întîmplare. Pe cealaltă dinainte o cunoștea. Liniște! să-i auzim: Tatăl: Fenomenul acesta e și mai curios căci, pe lîngă dispariția și apariția materiei, ea reapare, prin imaginea ei simetrică! S-a realizat suprapunerea a două figuri simetrice, ceea ce contrazice geometria! Profesorul: Nu dragul meu, nu-i nici o contrazicere. M-am gîndit mult la cele întîmplate și eu mi le pot explica, deși, recunosc că explicația mea poate apărea absurdă. Mama: Oricît de absurdă ar părea, vă rugăm să ne-o înfățișați și nouă. Va fi mai mult decît neliniștea pe care ți-o picură mereu, în suflet, întunericul neștiinței. Soțul meu și cu mine am căutat să ne amintim multe dintre problemele discutate la seminariile de matematică, de filozofie, dar degeaba nu am putut ajunge la nici o concluzie. Spuneți-ne cum vă explicați fenomenul. Profesorul: Admițînd că spațiul are trei dimensiuni. Acestea două pe care le cunoaștem noi și încă una, într-o direcție necunoscută nouă. Din spațiul cu 3 dimensiuni oricine ar putea veni, prin cea de a treia direcție aici aduce sau lua cu sine un

obiect și, în același timp, ar putea face rotația în jurul unei drepte exact cu aceeași ușurință cu care o facem noi în jurul unui punct! Așa cum suprapunem noi, prin rotația în jurul unui punct, două puncte simetrice față de un punct, acela ar putea suprapune, prin rotația în jurul unei axe, două corpuri simetrice față de o axă. Bineînțeles că asemenea rotație nu se poate efectua în spațiul nostru care are numai două dimensiuni. Tatăl: Și eu i-am spus nevestei mele că aceasta ar fi singura explicație, dar ea a rîs de mine, mi-a spus că trebuia să mă fac poet dacă am o imaginație așa de bogată! Sînt fericit că ați ajuns la aceleași concluzii. Mama: Nu, a 3-a dimensiune nu o pot admite, fiindcă am stat zile întregi cu gîndul la această dimensiune și nu văd încotro ar putea fi îndreptată. Mă înfioară gîndul că acum, cînd stăm aici de vorbă, ar exista alte ființe, bune sau rele, care să ne privească de undeva, de unde noi nu putem cunoaște, și să dispună de noi după bunul lor plac, de pildă, în clipa asta chiar să ne distrugă...

— Auzi, a rîs prietenul meu. Știi ce am să fac? Am să desenez cu creionul o linie care să treacă pe lîngă locul în care stă mama. Să vedem cum are să o scoată de-acolo!

— Nu, nu o mai înspăimînta degeaba, spune-mi mai bine dacă au avut și ei un Wells?

— S-ar putea să nu fi avut? Chiar copilul C_2, cînd a ajuns mare, a scris acest roman „Mașina timpului" căutînd să facă o prezentare, cît mai clar posibil, a celei de a treia dimensiuni a lumii sale, — timpul — de-a lungul căruia s-a îndreptat și el, întîi pînă în anul 802 701 și înapoi, și pe urmă în trecutul îndepărtat. Dar, gîndind mereu la fantastica lui întîmplare din copilărie, despre care discuta adesea cu tatăl său și cu prietenul tatălui său, el era așa de convins de existența unui spațiu cu 3 dimensiuni încît a mai scris chiar o carte intitulată „A treia dimensiune", unde admitea ipoteza că și obiectele din lumea lor, deși aparent cu două dimensiuni, mai au o a treia dimensiune foarte redusă, care se întinde într-o direcție imposibil de a fi observată prin simțuri, dar posibil de a fi concepută

mintal, cu ajutorul imaginației și al raționamentului. Mai mult, fără să-l fi văzut, fără să poată ști cum arată, el a desenat proiecția unui tetraedru pe care-l numea hipertriunghi, și a unui cub, căruia îi spunea hiperpătrat.

— Mai domol, lasă vorbele goale și arată-mi cum a făcut-o?

— După ce a observat că un triunghi echilateral este configurația care stabilește că trei puncte pot fi așezate totdeauna la distanță egală unul față de altul (fig. 22), a arătat că în spațiul în care se afla el problema era imposibilă pentru patru puncte, pe cînd, într-un spațiu cu trei dimensiuni, patru puncte se pot așeza în așa fel ca ele să fie, două cîte două, la egală distanță unul de altul. Considerînd punctul D ca nesituat în planul punctelor A, B, C, ci undeva într-o direcție necunoscută, acesta formează vîrful comun al altor trei triunghiuri echilaterale care au respectiv drept baze cîte una dintre laturile triunghiului echilateral ABC. Pentru tine, care vezi în spațiu, e simplu să și vezi în această proiecție un tetraedru (fig. 23), dar nu uita că ei nu și-l puteau imagina cum arată el, ci numai că aceasta este imaginea, proiecția lui pe un plan!

— În adevăr, un tetraedru e ușor de imaginat, ținînd seamă de configurația punctelor. Dar un cub? Aici cred că ar trebui să intervină mișcarea de translație!

— Ești foarte aproape de adevăr. El a folosit mișcarea de translație și analogia. Ca să obțin un pătrat, a spus el, trebuie să mișc un segment AB într-o direcție perpendiculară pe ea, pînă ce BC = AB. Pătratul ABCD are

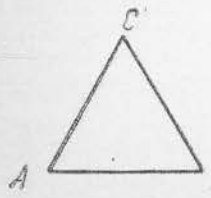


Fig. 22

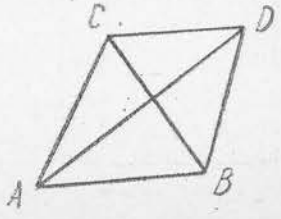


Fig. 23

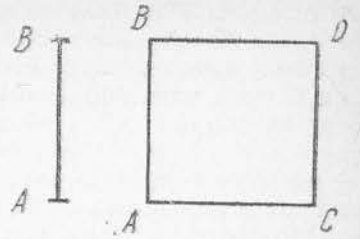


Fig. 24

două dimensiuni (fig. 24). Dacă aș avea posibilitatea să dau o mișcare de translație pătratului ABCD, într-o direcție perpendiculară pe planul său și cu o distanță egală cu AB, ceea ce înseamnă în dimensiunea a treia, atunci el ar putea fi reprezentat în proiecție pe planul nostru ca pătratul A'B'C'D' (fig. 25). Prin această mișcare, fiecare segment al pătratului a dat naștere unui nou pătrat, deci hiperpătratul din spațiul cu trei dimensiuni e format din 6 pătrate, adică are 6 fețe diferite, 8 vîrfuri și 12 laturi care, fiindcă nu sînt așezate toate în planul nostru, le voi numi muchii!

— Da. Raționamentul tău e just, dar nu-mi pot da seama de ce nu ar putea vedea și ei cum arată cubul, cînd desenul la care au ajuns este așa de clar și simplu de înțeles!

— Bine, atunci hai să facem o încercare și să vedem cum arată hipercubul.

— Adică vrei să spui că ai putea stabili proiecția cubului din spațiul cu patru dimensiuni? Mai întîi că nu se

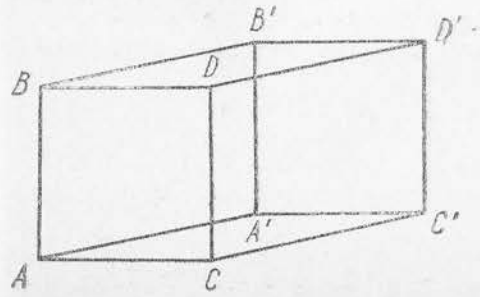


Fig. 25

potrivește, fiindcă dacă desenez un cub pe hîrtie am proiecția unui corp din spațiul cu trei dimensiuni în spațiul cu două dimensiuni, pe cînd aici vrei să sari de la spațiul cu patru dimensiuni la cel cu două! Cam prea mare pretenție!

— De ce te opui? Eu procedez sistematic. Întîi fac proiecția hipercubului în spațiul cu trei dimensiuni și fiindcă nu am posibilitatea să-ți construiesc obiectul în spațiu, ți-l transpun printr-o nouă proiecție în plan. Dar dacă vom trece mîine pe la Seminarul Matematic, am să te duc în camera de modele și ai să vezi proiecția în spațiu a hipercubului și chiar a hipertetraedrului, ambele executate în sticlă. De altfel sper că pînă la urmă ai să mi-l construiești chiar tu pe hîrtie!

— Mai știi minune? Începe atunci, să vedem!

— Nu fac decît să imit raționamentul gînganiei C_2. Consider un cub și îl deplasez într-o direcție perpendiculară pe cele trei muchii care pornesc din A, adică în a patra dimensiune, cu o distanță egală cu muchia cubului. Corpul care s-a format prin această mișcare în spațiul cu patru dimensiuni este hipercubul și acum am să ți-l desenez presupunînd că el este de sticlă, adică transparent, ca să-i vedem spațiile, planele, muchiile și vîrfurile. Cubul AH a ajuns, prin deplasare, în poziția A'H' și, totodată, fiecare din cele 6 fețe ale lui a descris un nou cub. Așadar, hipercubul are 8 cuburi, pe care le vezi aici în perspectivă (fig. 26)

— 8 cuburi zici? Eu aș înclina să văd numai 6! Acelea descrise de cele 6 fețe ale lui!

— Parcă mai înainte erai foarte mirat că gînganiile nu ar putea vedea cubul? Să ne întoarcem la el (fig. 25), căci am impresia că nici tu nu l-ai văzut prea bine! Ai pornit de la pătratul ABCD, el a rămas ca bază în plan și deplasîndu-se în spațiu a format a doua bază A'B'C'D' iar de jur împrejur se alătură fețele născute de cele 4 laturi ale pătratului.

— Ai dreptate. Așadar, cubul de la care am pornit va forma și el baza hipercubului. În spațiul cu 4 dimensiuni,

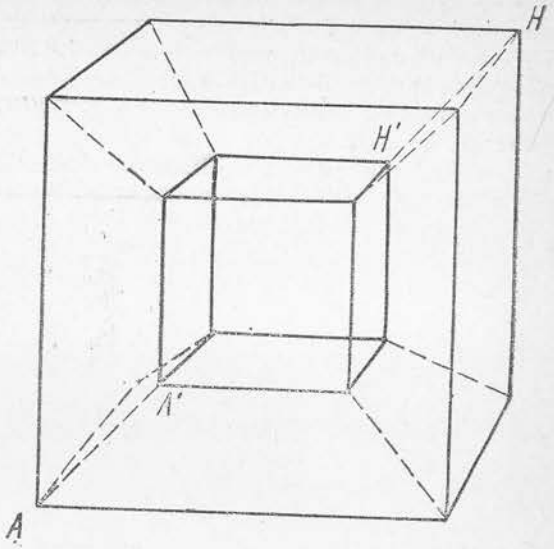


Fig. 26

acest cub tridimensional corespunde pătratului din spațiul nostru?

— Da. Trebuie să consideri ca fețe ale hipercubului aceste cuburi și nu planele, după cum și gîngăniile bidimensionale trebuie să-și imagineze cubul mărginit de alte pătrate și nu de laturile pătratului lui! De aceea am spus că hipercubul e mărginit de 8 cuburi!

— Acum încep să înțeleg: 6 cuburi se formează din nou și două există de la început: primul de la care am pornit și ultimul la care ne-am oprit!

— Însă nu-i numai atît. Cubul e format nu numai din cuburi ci și din fețe plane în formă de pătrate, anume are 24 pătrate: 12 sînt de la cubul prim și de la cel ultim, iar 12 provin din deplasarea muchiilor în număr de 12, ale cubului AH.

— Dar nu înțeleg cum vine asta, suprafețe și volume? Suprafețele nu fac parte din cuburi?

— Ba da, exact după cum muchiile cubului fac parte din suprafețele care au ieșit din planul cu două dimensiuni. Și acum să numărăm muchiile. Mai întîi avem 12 muchii ale cubului prim și 12 ale cubului final, fac 24, apoi 8 provenind din mișcarea de translație a celor 8 vîrfuri ale cubului AH, deci 32.

— Bine, așa pare, iar numărul vîrfurilor nu poate fi decît 16, adică 8 ale primului cub și 8 ale cubului final. Totul este în adevăr surprinzător de clar, dar mă apucă amețeala numai dacă încerc să-l văd cum ar arăta! E pur și simplu imposibil să mă ridic dincolo de spațiul meu!

— Atunci poți înțelege de ce, nici prietenul nostru C_2 nu putea vedea cum arăta cubul nostru, deși îi cunoștea perfect de bine caracteristicile? Simțurile lui nu erau create pentru dimensiunea a treia, după cum ale noastre nu ne dau posibilitatea să o sesizăm pe a patra! După cum ți-am mai spus, sînt convins că tu îmi poți arăta și cum sînt așezate 5 puncte în spațiul cu patru dimensiuni, în așa fel ca două cîte două să fie la egală distanță între ele.

— Da, tot prin analogie. Am să pornesc de la tetraedru și am să așez al 5-lea punct în spațiul cu patru dimensiuni, în afara tetraedrului în T (fig. 27), undeva unde nu-l pot vedea cu ochii mei, așa după cum gîngania C_2 nu putea vedea vîrful tetraedrului. Acum unesc acest vîrf cu vîrfurile fiecăruia dintre cele 4 triunghiuri ale tetraedrului și obțin

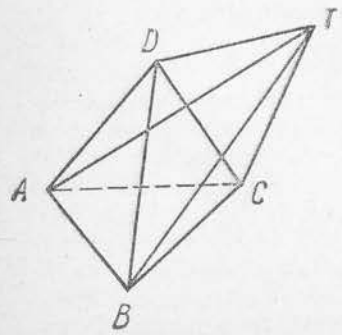


Fig. 27

astfel 4 tetraedre laterale care au ca bază tetraedrul de la care am pornit. În hipertetraedru, la cele 4 triunghiuri echilaterale ale tetraedrului corespund 5 tetraedre, iar ca fețe triunghiulare, trebuie să fie 4 ale tetraedrului mamă și alte 6 obținute unind punctul T cu cele 6 muchii, adică în totul 10 triunghiuri.

— Exact. Și muchii?

— Muchii? Mi se pare că tot 10, fiindcă tetraedrul avea 6 și s-au mai format 4, unind vîrful T cu cele 4 vîrfuri ale tetraedrului. Poate vrei să-ți spun și cîte vîrfuri are?

— Ei, despre asta nu mă îndoiesc că știi, fiindcă de la ele ai pornit! Ai vrut doar să găsești corpul din hiperspațiu care are ca vîrfuri 5 puncte echidistante, două cîte două între ele. Mă întreb cum ai rezolva problema dacă în loc de 5 puncte ai vrea să fie 6?

— Acuma, mai lasă-o, bădie! E la mintea cocoșului că aș considera un spațiu cu 5 dimensiuni!

— Care va să zică te-ai emancipat? Zbori prin spațiile cu mai multe dimensiuni de parcă te-ai da în scrînciob?

— În adevăr, acum două-trei ceasuri nici nu bănuiam că există asemenea probleme pe lumea asta, iar acum pot să-l înțeleg pe Wells și chiar să-i dau dreptate, deși, pentru el, a patra dimensiune nu aparținea efectiv spațiului, fiindcă el privea timpul drept a patra dimensiune.

— Asta numai în „Mașina timpului". Dar în „Oameni ca zeii", problema are cu totul alt aspect. Aici, el introduce eroii lui chiar într-un spațiu cu patru dimensiuni.

— Vrei să spui că oameni ca noi sînt puși să trăiască într-un spațiu cu patru dimensiuni?

— Vezi, ideea lui este că într-un spațiu cu patru dimensiuni pot pluti o mulțime de spații tridimensionale, tot așa după cum în spațiul nostru există o infinitate de suprafețe cu două dimensiuni. Exact așa după cum ne-am jucat noi, adineauri, intervenind într-o lume bidimensională, niște ființe care ar putea manevra din spațiul cu patru dimensiuni ar putea interveni asupra unor oameni din lumea noastră. Așa se întîmplă în acest roman. E vorba de un ziarist, dl. Barnstaple, care pornise cu mașina într-un concediu de odihnă.

La un moment dat mașina derapează și cînd se uită în jur nu mai cunoaște șoseaua pe care se aflase anterior și, pînă la urmă, constată că a intrat în altă lume, locuită de acești oameni ca zeii. El pătrunde în acest nou univers din întîmplare, fiindcă se găsea cu mașina pe linia de demarcație dintre spațiul lor și al nostru tocmai atunci cînd ei încercau un procedeu de a stabili trecerea dintr-o lume în alta.

— Credeam că am înțeles totul despre a 4-a dimensiune, dar asta nu o mai înțeleg! Cum adică linie de demarcație?

— Prea bine nu știu să-ți explic nici eu, dar dacă recurgem iar la analogia cu planul am putea să o scoatem la capăt. Ființele bidimensionale nu ar simți și nu ar putea vedea un alt plan sau o altă suprafață din a treia dimensiune care s-ar lipi, la un moment dat, de suprafața lor, fiindcă ei nu văd decît în două dimensiuni. Or, această suprafață, deși are tot două dimensiuni, este situată în spațiul cu 3 dimensiuni. Închipuiește-ți, de pildă, un cilindru circumscris unei sfere, de-a lungul cercului AB (fig. 28). Admite că pe cilindru trăiesc oamenii-zei bidimensionali și respectivul Barnstaple-gînganie plecat în concediu cu mașina sa pe șoseaua CO din punctul C. Cînd ajunge în punctul O

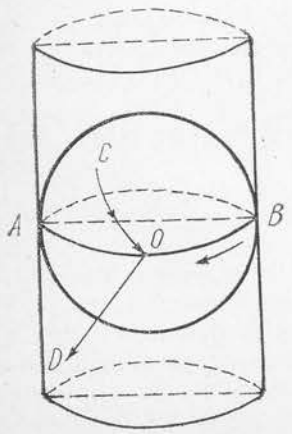


Fig. 28

de intersecție cu șoseaua AB, el poate derapa, datorită unor forțe pe care le pun în joc oamenii de pe cilindru — așa că, în loc să mai fie pe sferă, el se trezește mergînd pe linia OD de pe cilindru. El își dă bine seama că e în alt univers, dar nu știe cum arată. E tot o suprafață, poate să meargă pe linia OD și să trăiască acolo. Desigur că el nu va ști vreodată încotro ar trebui să apuce, ca să se întoarcă înapoi pe sfera lui. Însă ar putea fi condus din nou la hotarul dintre cele două lumi și de acolo, folosindu-se anumite procedee energetice, să fie introdus din nou în lumea lui. Așa s-a întîmplat chiar cu adevăratul Barnstaple! Deși ar fi dorit să rămînă acolo, acceptă să se întoarcă ca să dea posibilitatea oamenilor-zei să verifice reușita descoperirii lor. Ca să poată transmite un semn că a reintrat în universul său i s-a dat o floare roșie pe care a fost rugat să o așeze exact în locul în care va observa că mașina lui începe să lase urme pe pămînt. Îndeplinind rugămintea, el vede uimit că aceasta a dispărut într-o clipă, ca și cum: „o mînă ar fi apărut fulgerător apucînd floarea".

— Asta e clar, floarea a fost ridicată în afara universului nostru. Dacă ar fi așezată oriunde pe cilindru nici o gînganie de pe sferă nu o mai poate vedea.

— Atunci... începem a accepta a patra dimensiune?

— A, nu, nu accept nimic, dar încep a înțelege despre ce este vorba. De aceea, te rog, supus, spune-mi cîteva cuvinte și despre teoria relativității! Știu că și aici apare spațiul cu 4 dimensiuni, dar despre care spațiu cu patru dimensiuni este vorba, despre acela din „Mașina timpului" sau despre acesta din urmă în care cele patru dimensiuni se referă toate la spațiu?

— Așa cum pui tu întrebarea trebuie să-ți spun că e vorba de prima concepție: aceea de spațiu-timp, în realitate însă timpul se consideră tot ca o dimensiune a spațiului, a spațiului în care se petrec evenimentele din jurul nostru.

— Îți spun drept că mi-e parcă mai ușor să mă gîndesc la un spațiu cu patru dimensiuni, toate reprezentînd lungimea, decît la un spațiu cu 4 dimensiuni dintre care trei să

însemne lungimi iar una timp. Îmi sugerează ceva lipit din bucăți diferite.

— Da, fiindcă tu privești timpul și lungimea așa cum le privea nepotul tău Nucu, cînd era mic și nu prea făcea haz de matematici. Azi însă inginerul Nucu, care mînuiește butoanele de la mașina de calculat cu aceeași dexteritate cu care mînuia odinioară mingile de ping-pong, consideră, ca și mine, că aceste două noțiuni se leagă prin semnul de echivalență.

— Nu știu ce păreri are nepotul meu în această privință, dar știu cu siguranță că poartă la mînă un ceas pe care-l consultă dimineața ca să nu întîrzie iar cînd are de măsurat o lungime, l-am văzut că se folosește de un metru și niciodată de un cronometru! Dacă și-ar fi schimbat obiceiurile și ar fi înlocuit ceasul cu un metru, sau invers, te asigur că aș fi observat schimbarea, și i-aș fi cerut o explicație

— În locul acestei tirade, care are pesemne și pretenția de a fi ironică, aș fi preferat să te aud recitînd, ca demult, pe vremea studenției:

„La steaua care-a răsărit
E-o cale-atît de lungă,
Că mii de ani i-au trebuit
Luminii să ne-ajungă".

Să te fi opacizat oare pînă într-atît intuiția spațială, încît să fi uitat de aceste versuri? Sau, de cînd ai îmbătrînit, spiritul de contradicție a pus mai tare mîna pe tine?

— Mă acuzi degeaba! Și în aceste versuri e vorba de o lungime, căci, deși măsor timpul, un an de lumină înseamnă pentru mine distanța parcursă de raza luminoasă în acest timp, adică înseamnă 300 000 km/s înmulțiți cu numărul secundelor dintr-un an, așadar folosesc timpul ca să exprim o lungime!

— Exact așa cred și eu. Rămîne să-ți mai arăt că se folosește și lungimea ca să se exprime timpul, și atunci sîntem chit. Ori, uită-te te rog, la pendula matale cu care te fălești că o ai de la bunic. Cum măsoară ea secunda?

— Mi se pare că ceva, tot e putred în Danemarca! E adevărat că nu putem avea o unitate cu care să măsurăm intervalele de timp prin repetarea acestei unități etalon, așa cum avem un metru etalon, din cauză că timpul, odată trecut, e bun trecut! Numesc deci egale intervalele de timp folosite de un mobil ca să parcurgă, cu o mișcare uniformă, aceleași segmente de dreaptă sau, într-o mișcare de rotație uniformă, aceleași arce de cerc.

— Vezi! e de ajuns să străbatem puțin mai în adînc decît la nivelul ideilor noastre preconcepute, și totul începe să oscileze... Eram student cînd, la îndemnul profesorului meu Alexandru Myller, am citit cartea lui A.S. Edington: „Espace, temps et gravitation". Apăruse în traducere franceză numai de cîțiva ani și, bineînțeles, fusese îndată comandată de către Seminarul Matematic, fiindcă acest mare astronom și filozof englez era considerat atunci ca unul dintre puținii oameni de știință care au înțeles cu adevărat teoria relativității. Puține cărți mi-au dăruit atîtea bucurii și satisfacții intelectuale ca ea. Nu știu de ce, în ultima vreme mi-am amintit de această carte și am dorit mult să o recitesc. De aceea, chiar din prima zi cînd am venit la tine, m-am dus la Seminar și am împrumutat-o. Pînă acum nu s-a ivit ocazia să-ți vorbesc despre ea, dar, în astă seară, deși e cam tîrziu, am să o fac. Așteaptă-mă să urc în camera mea și să cobor.

De obicei, cînd citesc o carte pe care am adorat-o în tinerețe, a reluat prietenul meu discuția, după ce s-a întors, nu mai găsesc aceeași strălucire și nici același parfum. Totul e mai decolorat și mai evaporat. De data aceasta însă n-a fost așa. De la primele pagini am regăsit plăcerea de odinioară. Trebuie să-ți spun că Prologul „Ce este geometria" m-a încîntat din nou, ca și cum l-aș fi citit acum pentru prima oară, și fiindcă dorești să știi ce este Teoria Relativității, îți las această carte să o citești și tu, cît stau la tine, ca să putem discuta și lămuri orice va fi nevoie. Am adus-o acum aici, fiindcă nimeni nu cred că ar putea să răspundă mai bine decît acest prolog la nedumeririle sau poate la impasul în care am ajuns noi. Ba chiar mai mult,

sînt sigur că cele cîteva pasaje pe care vreau să le citim împreună te vor ademeni să citești toată cartea. În Prolog este redată o discuție între „un Fizician experimental, un Matematician pur și un Relativist, apărător al celor mai noi concepții ale timpului și spațiului, în științele fizice". Sînt așadar puse în discuție înseși noțiunile fundamentale ale geometriei privite din punctul de vedere al fiecăruia dintre vorbitori.

— Nu văd cum ar mai putea fi considerate noțiunile fundamentale din diferite puncte de vedere! Cred că aceste noțiuni, pe care se bazează geometria, sînt în afară de orice discuție.

— Ca să vezi că te înșeli, află că Relativistul începe prin a întreba dacă e adevărat sau nu că suma lungimilor a două laturi dintr-un triunghi este mai mare decît lungimea celei de a treia laturi.

— Ce mai întrebare! Cred că și Fizicianul și Matematicianul i-au rîs în nas.

— Nu prea. Matematicianul i-a răspuns că nu poate afirma dacă teorema e adevărată sau nu, dacă în prealabil nu admite că axiomele pe care se bazează ea sînt adevărate sau nu. E drept că Fizicianul a susținut adevărul acestei teoreme, pe baza măsurătorilor făcute cu o riglă gradată. La acestea însă Relativistul a răspuns: „Era vorba de o propoziție geometrică — o proprietate a spațiului și nu a materiei. Dovada experimentală ne arată cum se comportă o riglă materială cînd îi dai diferite direcții". Din observațiile ce urmează tot el trage concluzia că Universul nu poate fi explorat decît prin anumite aparate, de aceea printr-o riglă gradată se ajunge la geometria naturală, printr-un ac magnetizat se va descoperi cîmpul magnetic etc. Revenind la problema măsurătorii, Fizicianul precizează că o lungime trebuie să fie măsurată cu o riglă rigidă, adică o riglă care păstrează aceeași lungime.

— Desigur că-i așa. Dacă rigla ar fi din elastic, nu ai mai putea avea încredere în nici o măsurătoare!

— E foarte adevărat, numai că, după cum observă și Relativistul, această condiție conduce la un cerc vicios:

o lungime se măsoară cu o riglă rigidă iar rigla rigidă este aceea care păstrează aceeași lungime!

— Așa-i, dar ce poți să-i faci? Vezi altă soluție?

— Desigur, definești, adică îți alegi, un etalon de lungime și, odată ales, consideri că el rămîne constant. Dar făcînd aceasta și presupunînd că toate erorile de observație au fost eliminate, trebuie să recunoști că toate cunoștințele pe care le obții despre spațiu sînt relative, fiind tributare modului de comportare a riglei. Ca să pătrunzi și mai adînc natura relativității cunoștințelor noastre despre spațiu, am să-ți citez și un exemplu considerat de Poincaré: dacă toate corpurile din jurul nostru, corpul nostru însuși și instrumentele noastre de măsură s-ar mări sau s-ar micșora în aceeași proporție, noi nu ne-am putea da seama despre aceasta, ba chiar mai mult, dacă în locul unei simple dilatări sau comprimări, toate obiectele inclusiv noi și instrumentele de măsură s-ar deforma după o anumită lege, oricît de complicată ar fi ea, noi tot nu ne-am putea da seama despre asta, după cum nu ne dăm seama nici că sîntem antrenați, prin mișcarea de translație a pămîntului, mereu în altă regiune a spațiului! Aceeași relativitate a fost stabilită de Albert Einstein și față de timp, în sensul că, după cum proprietățile spațiale rezultă din acelea ale instrumentelor de măsură, tot așa și proprietățile timpului depind de ale ceasornicelor folosite pentru a-l măsura. Problema timpului va fi amplu discutată în carte, mai ales ca o dimensiune a spațiului evenimentelor. Iată ce spune, în această privință, Relativistul: „Eu cred că există o semnificare reală care trebuie atașată de timp, considerat ca a patra dimensiune, și nu pur și simplu ca o a patra variabilă. Termenul dimensiune îmi pare legat de o idee de ordine. După părerea mea, ordinea evenimentelor din natură este o ordine patru-dimensională indisolubilă. Putem să o împărțim arbitrar în spațiu și timp, tot așa după cum putem împărți ordinea din spațiu în lungime, lățime și înălțime. Dar spațiul fără timp este tot așa de necomplet ca și o suprafață fără grosime".

Prin aceste simple idei începi să pătrunzi în teoria relativității, prin care Einstein a revoluționat nu numai gîndirea științifică a fizicienilor, deși în primul rînd a lor, dar și a astronomilor, a matematicienilor, a filozofilor și pe rînd ale altor specialiști. Fiindcă datorită acestui mare gînditor s-a putut înțelege clar că natura fenomenelor observabile depinde de condițiile de spațiu și timp în care se află observatorul.

— Adică nu ar avea nici un sens să căutăm absolutul? Nu vom ști niciodată poziția absolută a unui obiect din spațiu și nici mărimea lui absolută?

— Nu, și nici dacă două evenimente se petrec în același timp, adică dacă ele sînt simultane, sau nu.

— Ei, asta-i prea de tot!

— N-ai să mai spui așa, după ce vei citi cartea lui Edington!

STRĂDANII DE PERFECȚIONARE A PROCEDEELOR DE CALCUL

sau

De la abac la creierul electronic

— Azi am avut o mare bucurie, mi-a zis Teodor Solonar, prietenul și acum oaspetele meu, cînd a intrat pe ușă. Vin de la nepotul tău, Nucu, pe care l-am văzut lucrînd la calculatorul electronic.

— Mi-a spus și mie că Institutul lor a primit o mașină de calcul electronică, mie însă nu mi-a făcut cinstea să mă invite să o admir!

— Lasă băiatul în pace căci el habar n-are de pasiunea ta pentru matematici. Chiar adineauri, cînd l-am rugat să treacă înspre seară pe la noi ca să discutăm mai pe îndelete despre mașina lui de calcul, era convins că te-ar plictisi pe tine.

— Într-un fel e așa, fiindcă eu am discutat cu el numai probleme de literatură, istorie, mitologie...

— Ai uitat să adaugi și capitolul care intervenea cel mai des între voi: morala, morală și iar morală! À-propos! Cînd ați încheiat ultimul capitol al acestei importante discipline? Cînd și-a trecut examenul de inginer, sau a mai continuat și după?

— Asta-i amestec în treburile interne și refuz să răspund. Cum a rămas? Vine?

— Da. Îți face plăcere?

— Mă mai întrebi? Poți rămîne indiferent în fața procesului de dezvoltare a calculului numeric? De multe ori mi se afundă gîndul în hăul trecutului, cercînd să prind începutul acestei emoționante povești ce începe așa: „A fost odată un om care nu auzise de la nimeni niciodată despre numere, care nici nu bănuia ce ar putea să însemne socoteala și care a început, așa deodată, singur-singurel, să socotească"!... Dacă-ai ști ce dor mi-e să stau în fața acelui frate al meu de demult și să-i surprind mirarea înceţoşîndu-i ochii! Cum a început? Cu pietricele, cu rămurele, cu scoici ori cu dinții animalelor ucise, pe care-i păstra drept trofee sau ca podoabe? În grămăjoara aceea de pietricele, sau de mai știu eu ce, văd înfiripîndu-se umbra abacului... și mă întreb: oare omul a inventat abacul ca să-l ajute la socoteli sau abacul s-a zămislit singur, alături de om și l-a învățat el, pe om, să socotească?

— Încurcate gînduri, dragă prietene! Le-aș numi „poezie și adevăr" pentru același motiv pentru care Goethe și-a intitulat astfel autobiografia sa.

Oricum ar fi fost în începuturi, abacul a rămas pînă azi un mijloc îndemînos de ușurare a calculului, de a-l face mult mai rapid. Totodată el a înlocuit munca intelectuală care se impune în mod necesar ca să poți calcula bine, printr-o muncă mai simplă, aproape fizică.

— În adevăr, ca să calculezi cu abacul nu ai nevoie să știi nici cît face 2 + 2, fiindcă ți-o spune abacul singur. Tu trebuie să fii atent cînd mînuiești mărgelele — sau pietricelele — și apoi să le numeri. Atîta e de ajuns, să cunoști regulile abacului și să știi să numeri!

— Iar dacă la noi abacul s-a transformat într-o jucărie pentru copii, în țările din Orientul apropiat sau îndepărtat el se folosește pe scară largă de către negustori, care fac cu o repeziciune uimitoare cele mai grele și complicate operații numai cu ajutorul lui.

— Am citit undeva că, prin secolele XIV, XV și chiar XVI, existau în Europa un fel de birouri sau întreprinderi de calcul — ceva corespunzător centrelor noastre de calcul — numai că, în locul mașinilor de calcul, erau la loc de

cinste abacele. Aici veneau negustorii și aduceau înmulțirile și împărțirile ce le aveau de făcut iar peste cîteva zile se întorceau ca să capete rezultatele!

— Da, așa era, fiindcă înmulțirile și împărțirile se prezentau ca operații extrem de complicate. Nu uita că cifrele arabe erau încă în rivalitate cu cele romane și mulți le preferau, din obișnuință, pe acestea din urmă. Pe atunci regulile practice de înmulțire, cu care azi sîntem așa de obișnuiți, nu erau stabilite și omul de rînd sau negustorul nu putea face o înmulțire; de împărțire nici nu pomenesc. Era tot așa după cum azi, directorul unei fabrici sau al unei uzine nu poate rezolva singur mulțimea ecuațiilor diferențiale, a integralelor sau ale altor forme de calcul, cerute de procesul respectiv de producție și apelează la un centru de calcul care să-i prezinte datele respective, gata prelucrate.

— O fi, nu zic nu, dar trecerea de la abac la mașina de calcul s-a făcut oare așa de simplu cum ai, mata, aerul să mi-o prezinți, probabil ca să scapi mai ieftin? Pînă vine Nucu, te rog să-mi pui jaloanele necesare să mă călăuzească într-acolo!

— Pretenția ta e dreaptă. Numai cum am să ți-o îndeplinesc? Trebuie să ne întoarcem, hăt de tot în urmă, la babilonieni și la egipteni. Ca să ghicești de ce, gîndește-te la Pitagora!

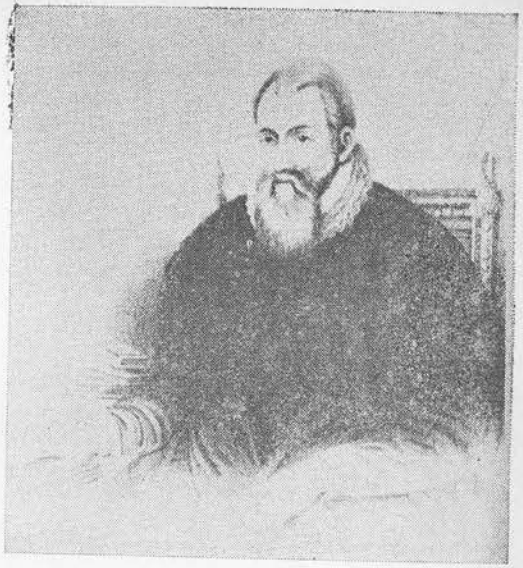
— La tabla înmulțirii? Adică, în general, la tabele de calcul?

— Exact! Primul jalon după abac, în procesul de ușurare a calculelor a fost făcut de om atunci cînd s-a gîndit să-și păstreze sub formă de tabele scrise, fie pe papirus, fie pe tăbliţele de cărămidă arsă, sau în piatră, rezultatele unor anumite operații mai greu de executat dar care se repetă. S-au descoperit și se mai descoperă încă numeroase tabele numerice lăsate de aceste vechi popoare: tabele de pătrate, tabele cu cuburile numerelor, tabele de prefacere a fracțiilor cu numărătorul diferit de 1 în fracții cu numărătorul unu, singurele folosite de egipteni în mod curent, ca să nu mai vorbesc de tabla lui Pitagora pe care de peste 2400 de ani fiecare om cu carte o învață pe de rost! Ți-am enumerat

numai cîteva dintre cele mai vechi tipuri de tabele, înainte de a-ți vorbi despre cele mai importante, tabelele de coarde, — e vorba de coarda subîntinsă de un arc de cerc— și de tabelele funcțiilor trigonometrice construite de arabi. Tabelele de coarde, întocmite de greci, premerg pe acelea ale sinusului și le vom îngloba tot în masa tabelelor trigonometrice. Pentru calcularea lor s-a cheltuit multă materie cenușie și mult timp, enorm de mult timp. Dar cu ajutorul lor s-a cîștigat nu numai incomparabil mai mult timp, ci s-au realizat metode astronomice și tehnice de orientare și măsurare a timpului care au împins lumea înainte pe drumul civilizației și al progresului.

— Nu știu cum poți trece peste asemenea lucruri cu atîta ușurință de parcă ar fi vorba despre un fapt divers? Mă simt așa de mic și de umil față de oamenii aceia, hinduși, chinezi, arabi, europeni, care s-au trudit zi și noapte calculînd și iar calculînd cifră cu cifră, ca să le înscrie în tabelele lor pe care se străduiau să le facă cît mai exacte. Și le-au făcut pentru alții, care nici nu bănuiau cu cîtă trudă a fost cucerită fiecare cifră, care nu știau cum au putut fi stabilite. Cînd le au la îndemînă, le consultă și, dacă sînt pe mare, spun: sîntem în cutare loc și e ora cutare, iar dacă sînt pe uscat determină rezistența unui pod, direcția unui drum sau cine știe ce alte date cu care se preface vechiul în nou!

— Recunosc că nu sînt așa de sentimental ca tine. Urmărind cu mintea, rînd pe rînd, șirul de înmulțiri, împărțiri, ridicări la puteri și adunări din care se compune, în intimitatea lui, procesul de construire a unei tabele trigonometrice, nu mai am cum fi romantic! După cum ți-am spus, în afară de operația adunării — și inversa ei, scăderea — toate celelalte operații aritmetice erau anevoioase și dădeau mult de furcă matematicienilor-calculatori. Începînd cu secolul al XV-lea, dezvoltarea navigației și tot avîntul tehnic de care era cuprins apusul Europei, cerea înmulțiri, cerea tabele! Atunci se descoperise tiparul, dar încă nu era dat în folosința curentă, totul se scria cu mîna. Îți închipui ce lipsă de tabele și de calculatori iscusiți era pe atunci? La începutul veacului al XVI-lea s-a produs, în sfîrșit, un eveniment de



Neper

seamă în lumea calculatorilor: anume, Werner descoperea un procedeu de înlocuire a înmulțirilor și împărțirilor prin adunări și scăderi! Metoda, găsită într-un manuscris de trigonometrie sferică, s-a publicat abia prin 1913.

— Eu știu că Neper a descoperit logaritmii la începutul veacului al XVII-lea...

— Dar nu-i vorba despre descoperirea logaritmilor, ci de o altă metodă, numită „prosthaphaeresis", sau *prostaferitică*, cum i-a spus Ion Ionescu într-o lucrare a sa. Ea se bazează pe formula trigonometrică:

$$\cos (a-b) - \cos (a + b) = 2 \sin a \cdot \sin b$$

de care sînt sigur că îți mai aduci aminte.

— Bine, dar această metodă este extraordinar de complicată! Trebuie să transformi numerele de înmulțit în sinusuri și apoi, după ce ai aflat unghiurile a și b, să cauți în tabele $\cos(a+b)$ și $\cos(a-b)$ ca, după aceea, să le aduni!

— Așa cred și eu, dar lumea de atunci nu era de părerea noastră. Unul dintre cei mai de seamă matematicieni și astronomi din vremea aceea, Christofor Clavius, exclama fericit că aplicarea acestei metode „este plină de plăceri și satisfacții"!

— În cazul acesta, pot înțelege perfect ce trebuie să fi însemnat o înmulțire!

— Vezi, și de data aceasta judeci pătimaș! Nu uita că maestrul Clavius, în calitatea lui de astronom, era obișnuit să mînuiască tabelele trigonometrice. În plus, nu de mult se terminase de publicat tabelele trigonometrice ale lui Rheticus: „Opus Palatinum" în care erau date, cu zece zecimale, valorile funcțiilor trigonometrice, din 10″ în 10″. Cred, cu siguranță, că o copie a acestor tabele fusese procurată și de Observatorul astronomic din Roma, unde se afla Clavius. Așa că, pentru el, era într-adevăr o plăcere să caute în tabele și apoi să facă adunări. O asemenea muncă cerea mai puțină încordare intelectuală decît operația înmulțirii. Însă strălucirea acestei metode a fost ca și a unei comete! A dispărut fără urmă de îndată ce Neper și-a publicat invenția lui, în 1614, la Edimburg, cu titlul: „Mirifici logarithmorum Canonis descriptio".

— Cum? A scris chiar așa, minunații logaritmi?

— Da, fiindcă Neper, Baronul de Merchiston, a știut să prețuiască, așa cum trebuie și fără nici o falsă modestie, extraordinara valoare a descoperirii sale. Azi, cercetările de istorie a matematicilor au stabilit că au existat, încă din veacul al XV-lea, unele lucrări matematice care pot fi considerate ca premergătoare logaritmilor, dar pe vremea aceea descoperirea anunțată de Neper a făcut senzație. Un contemporan, după cîte țin minte, a scris că invenția logaritmilor a venit în lume ca un trăsnet din senin și că ea stă izolată de orice alte metode de ușurare a calculelor inventate mai înainte, fără să împrumute nimic de la nimeni! De altfel a rămas un mister calea pe care a urmat-o Neper ca să ajungă la noțiunea de logaritmul unui număr. El nu o spune și nu reiese nici din cartea dintîi și nici din a doua, publicată 5 ani mai tîrziu după moartea autorului sub același titlu, numai că în loc de „descriptio" este „constructio".

Douăzeci de ani a lucrat John Neper la această invenție, care se bazează pe corespondența ce există între două progresii numerice, una geometrică începînd cu unu și alta aritmetică începînd cu zero. El a observat că, folosind această corespondență, la operațiile de înmulțire și împărțire dintre numerele progresiei geometrice, corespund acelea de adunare respectiv scădere dintre termenii progresiei aritmetice. Cred că îți amintești aceasta? Scrie cele două progresii una sub alta, rația progresiei geometrice notînd-o cu „e".

— Numărul „e" este un număr transcendent, baza sistemului de logaritmi neperieni și, dacă vrei să știi, află că mai țin minte încă versurile pe care le-ai făcut în tinerețe, ca să poți memora primele 12 zecimale ale acestui număr. Iată-le:

„Pe numărul e, savantul îl stimează
E-academic și formează
Bază pentru logaritmi".

Așadar: e = 2, 718281828469...

— Grozave versuri! Mi-i rușine de ele!

— Nu mai spune! Dar atunci te făleai că ți le-a publicat Gazeta Matematică.

— Eram tînăr, scuză destul de plauzibilă. Așadar, scrie-mi cele două progresii!

— Iată-le:

$$1 \quad e \quad e^2 \quad e^3 \quad e^4 \quad e^5 \quad \ldots\ldots$$

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \ldots\ldots$$

— Acum e ușor să observi că înmulțirea a două numere, de pildă $N_1 = e^3$ cu $N_2 = e^5$ corespunde la adunarea exponenților: $N_1 \cdot N_2 = e^3 \cdot e^5 = e^{3+5} = e^8$. Așadar în loc să fac înmulțirea efectivă dintre e^3 și e^5 e de ajuns să fac adunarea exponenților $3 + 5$ și apoi să caut în tabelă numărul corespunzător, în cazul de față, cît face e^8. Însă Neper nu prevăzuse, se pare, de la început, și tocmai din cauza aceasta el și-a numit logaritmii lui „minunați sau admirabili", că ei ar putea fi în stare să reducă și operația de ridicare la o putere, la una mai simplă, de înmulțire dintre logaritmul

numărului și exponentul puterii iar extragerea de rădăcină la o împărțire de aceeași natură. Logaritmii se dovedeau astfel un mijloc universal de ușurare a calculelor, cu singura condiție ca să ai la îndemînă o tablă de logaritmi!

— Cu singura condiție ca să știi ce este logaritmul unui număr!

— Îți cer iertare pentru această uitare, deși știu că ai făcut observația numai din malițiozitate! Neper numește logaritmul numărului care se află în progresia geometrică numărul corespunzător din progresia aritmetică. Cuvîntul compus din „logon" adică *proporție* sau *raport* și „arithmos" adică *număr*, exprimă după unii proprietatea lor fundamentală, anume că diferența logaritmilor numerelor proporționale este aceeași; după alții, pur și simplu că logaritmii sînt numere care au un anumit raport cu alte numere.

— Îmi închipui ce sentiment de împlinire și cîtă satisfacție trebuie să se fi manifestat atunci printre matematicieni!

— Henry Briggs, cel ce a calculat prima tablă de logaritmi zecimali, după ce a citit cartea lui Neper a fost atît de copleșit încît nu și-a dorit nimic altceva decît să-l cunoască pe Neper. Sîntem în 1614 și nu în 1969! De aceea întîlnirea a avut loc abia în anul 1615 și a rămas consemnată într-o cronică a timpului, căci la întrevedere a luat parte și un prieten al lui Neper, invitat de acesta. Briggs era profesor de geometrie la Cambridge. El a plecat la Marchiston, în Scoția, unde se afla castelul lui Neper. Cînd a fost condus în camera unde se afla Neper, a trecut aproape un sfert de oră fără ca vreunul să scoată o vorbă, „căci fiecare îl privea pe celălalt cu admirație". Foarte probabil că la sugestia lui Neper, după întrevedere, Briggs începe calcularea logaritmilor zecimali, care, din punct de vedere practic, prezintă avantaje însemnate. Kepler, vestitul astronom, a fost și el la fel de entuziasmat de apariția logaritmilor, dar, sărac cum era, gîndul unei întrevederi cu Neper probabil că nici nu i-a trecut prin minte. Cu aceeași rîvnă ca și Briggs, fără să știe de acesta, se apucă să calculeze și el o tablă de logaritmi zecimali așa că, în 1624, apăreau de sub tipar, la Londra logaritmii calculați de Briggs și la Marburg, cei calculați de Kepler. „Logaritmii, scrie Kepler, au dublat viața astronomilor" și aceeași idee o exprimă mai tîrziu Laplace. Numai Neper nu a luat parte la acest entuziasm unanim, căci el moare în 1617, doi ani după întrevederea cu Briggs!

— Vrei să spui că au fost necesari aproape 10 ani de calcule pentru a se realiza tabla de logaritmi zecimali?

— De ce te miri? Nu am accentuat pînă acum îndeajuns cît timp cerea întocmirea lor cînd nu existau mijloace rapide de calcul? Nu a lucrat Neper 20 de ani? De altfel nimeni nu concepea că ar putea ieși din acest impas și de aceea, cînd au apărut logaritmii, nici Briggs, nici Kepler și nici alții nu au stat o clipă la îndoială în fața noianului de calcule ce-i așteptau! În ei era salvarea! Interesant apare azi un fapt relevat mai tîrziu de istoria matematicilor, anume că, independent de Neper și aproape în același timp, ajunge la aceeași invenție și elvețianul Jobst Bürghi din Praga. Lucrarea pe care o publică el în 1620, intitulată „Table cu progresii aritmetice și geometrice" unde se găsesc nu numai logaritmii numerelor ci și antilogaritmii lor, a trecut atunci neobservată!

— Faptul este explicabil din punct de vedere psihologic, căci toți matematicienii și calculatorii erau fascinați de numele lui Neper, și ideea lui le apărea atît de genială că nu puteau admite să o mai fi avut și un altul! Și totuși asemenea rare coincidențe apar de multe ori în științe. Legea lui Boyle-Mariotte, sau altele...

— Mai ales că în acel an, 1620, în Franța se tipăreau tabelele de logaritmi ale lui Neper, iar în Anglia Edmund Gunter imprima prima tablă cu logaritmii liniilor trigonometrice. Despre logaritmi ar mai fi multe de spus dar, ca să nu ne prindă și Nucu vorbind tot despre ei, aș vrea să urmărim, în continuare, desfășurarea procesului de ușurare a calculului.

— De ce? Cine ne grăbește? Eu doresc să-mi mai vorbești despre logaritmi, fără a mă tiraniza cu nici un fel de motive!

Ion Ionescu

— Nu te tiranizez! Dacă e vorba să împăcăm și capra și varza, admite că n-am acum în minte alte amănunte, fiindcă nu m-am pregătit să-ți vorbesc azi despre logaritmi. Însă...

— Lasă, nu mă minți! De atîtea ori mi-ai dovedit că știi și toaca din cer și acum, dintr-o dată, ai uitat totul!

— Lasă-mă și tu să termin, cel puțin, ideea începută. Am văzut că ai în bibliotecă cele două volume de *Povestiri științifice* ale lui *Ion Ionescu*, volume pe care eu le prețuiesc nespus de mult. Ei bine, în unul dintre ele ai să găsești ceea ce-ți trebuie. Articolul „Jubileul logaritmilor", întocmit cu ocazia sărbătoririi în lumea întreagă a 300 de ani de la descoperirea logaritmilor, este scris cu atîta vervă și competență că nu-l vei lăsa din mînă îndată ce vei începe să-l citești. Mă mir că nu l-ai citit pînă acum!

— Ba, cred că l-am citit, dar trebuie să fie peste 25 de ani de atunci, așa că-mi dai voie să-l fi uitat, ținînd seamă că n-am numai asta în cap, ca matale! Dar, fie voia ta, am-să-l citesc.

— Bine ai să faci și ca să nu-ți las numai ție bucuria acestei lecturi, te rog să-mi dai cele două volume ca să caut articolul și să citim împreună sfîrșitul, care-i deosebit de duios.

— Duios, spui? Iată-le.

— Ascultă și ai să te convingi și tu: „Eram în clasa IV-a primară, cînd văd la un anticar o aritmetică mare și jerpelită, pe care am luat-o pe un preț de nimica. Mă duc spre casă, o răsfoiesc și văd pe la sfîrșit un capitol despre logaritmi, la care se spunea că aceștia pot înlocui înmulțirile și împărțirile prin adunări și scăderi. De bucurie că am să scap de fioroasele înmulțiri și împărțiri cu numere complexe la care stînjeni cubici însoțiți de palmele, degetele și liniile lor cubice se înmulțeau cu lei, parale și lăscăi,... nu știu cum am ajuns acasă!... Logaritmii mi-au arătat atunci una din frumusețile pe care matematica le are ascunse într-însa și mi-au dat imboldul să mai caut să cunosc și altele... faptul că acum îmi petrec din orele libere cu studiul unor chestiuni de știință... se datorește în prima linie transformării pe care au produs-o în mine logaritmii la o etate la care impresiile produse se șterg cu greu".

— E adevărat, puțini oameni și-au dăruit cu atîta elan și în mod continuu, întreaga lor viață, pentru formarea gustului matematic la noi în țară! De aceea el era supranumit *unul dintre stîlpii Gazetei Matematice*! Însă pe cînd îmciteai, mă gîndeam că dacă ne-ar auzi un școlar de azi, care nu s-a prea interesat de trecutul unităților de măsură de la noi, ar rămîne cu totul dezorientat, auzind de *stînjeni, palme, degete* și *linii* sau de *parale* și *lăscăi*.

— Da, și de numere complexe pe care le-ar confunda cu numerele imaginare! În cazul acesta ar trebui să-i explicăm că înaintea introducerii sistemului metric în țara noastră — la 1 ianuarie 1866 — unitățile de măsură nu erau nici exacte și nici nu aveau aceeași lungime în cele două principate, deși aveau aceleași numiri: stînjen, palmă, deget, linie. În plus, între aceste unități nu exista un raport constant și nici vorbă să fie zecimal!

Iată de ce o lungime, ca de pildă: 3 stînjeni, 4 palme, 6 degete și 2 linii era un număr complex, așa cum este azi numărul care exprimă un interval de timp: 3 ore, 4 minute, 6 secunde și 2 terțe! Și acum să revenim de unde am plecat ca să pornim mai departe. Ți-am vorbit de Gunter care a calculat prima tablă cu logaritmii liniilor trigonometrice. Tot el are și ideea ingenioasă de a construi rigla de calcul, adică o tablă de logaritmi transformată într-un instrument.

— Un instrument și mai ingenios decît abacul! Îmi face o nespusă plăcere cînd văd, prin vitrinele librăriilor, acele mici rigle albe, prevăzute cu un cursor lat ca o cataramă, amestecate de-a valma cu creioane și stilouri de parcă ar fi niște rigle obișnuite de desen și nu un mini-calculator!

— Rigla lui Gunter era foarte departe de aceea pe care o admiri tu prin vitrinele librăriilor. Era pur și simplu o scară logaritmică, adică o linie dreaptă pe care erau însemnate, pornind de la o origine comună, segmente proporționale cu logaritmii numerelor naturale. Aceste segmente erau notate prin numărul al cărui logaritm îl reprezenta. Deci, logaritmul lui unu fiind zero, se nota originea cu 1, după care urma în ordinea lor naturală numerele 2, 3,... Fiecare interval era la rîndul lui împărțit în zece părți egale. Ca să se facă înmulțirea a două numere se luau în compas lungimile celor două segmente de pe dreaptă și se stabilea cît este suma lor. Sub această formă rudimentară, rigla a fost multă vreme folosită cu succes și poate că se mai întîlnește uneori și azi în marină, pe vasele mai vechi. O primă perfecționare a adus-o, cîțiva ani mai tîrziu, Edmund Wingate care introducea o a doua riglă ce aluneca de-a lungul primei, în așa fel ca cele două segmente să poată fi aduse unul în prelungirea celuilalt. Pasul decisiv către rigla de azi l-a făcut Robert Bissaker care a construit rigla din trei linii alăturate și gradate la fel, linia din mijloc alunecînd între cele două extreme care erau legate fix între ele. În fine, pe la jumătatea secolului trecut s-a mărit precizia în citirea rezultatelor, prin introducerea cursorului transparent, avînd gravat pe el o linie de reper. Totodată alături de scările logaritmice au fost introduse scări trigonometrice, scări de ridicare la

Blaise Pascal

pătrat și la cub sau altele necesare în topografie, așa fel încît rigla a devenit o veritabilă mini-tabelă de logaritmi, ca să folosim termenul la modă acum!

— E foarte îndemănoasă și pe șantiere, unde nu sînt necesare decît puține zecimale exacte, nu există un ajutor mai bun și mai rapid, cînd e vorba de făcut înmulțiri, împărțiri ...Dar ce te faci cînd ai coloane întregi de adunat? Te întorci la abac?

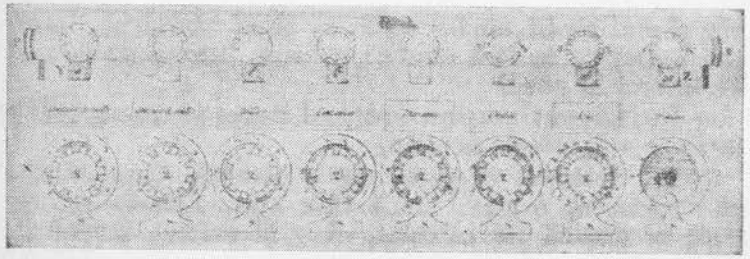
— Nu, folosești mașina de calcul, aceea pe care o vezi pe la toate magazinele noastre.

— Îmi închipui că și ea are o poveste. Oare crezi că nu-s curios să o aflu? După cîte știu, Leibniz a construit o mașină de calculat, el e și primul inventator?

— Nu, i-a luat-o înainte Blaise Pascal, care s-a născut înaintea lui Leibniz. Mai mult chiar, Blaise Pascal a construit mașina sa de adunare la 19 ani pe cînd Leibniz a conceput-o la 25. Adevărat că-i vorba de o mașină mai complicată care să rezolve și înmulțiri, dar o termină cu mult mai tîrziu! Pascal însă, care a avut o viață așa de scurtă, trebuia să se grăbească! De altfel, Pascal a fost un copil minune și a arătat predispoziții timpurii nu numai pentru geometrie dar și pentru invenții mecanice. El a născocit roaba, ca să ajute grădinarilor să care mai ușor pămîntul, și poate că n-ar fi inventat mașina de calcul dacă nu ar fi stat, alături de tatăl lui, nopți întregi ca să adune și să-i ajute să întocmească situațiile financiare ce i se cereau acestuia în calitate de inspector financiar. Istovirea pe care o încerca după asemenea eforturi l-a înc'emnat să caute, și în acest caz, roaba potrivită să ducă ea greutatea concentrării mintale și să spuie singură rezultatul, după ce va fi încărcată de numere!

Imaginația lui bogată i-a arătat că de data aceasta nu va ajunge o singură roată și, în nopțile lui de insomnie, a început să construiască, în gînd, toate rotițele și angrenajele care să-l ducă la țel. Apoi a început să taie și să șlefuiască toate acele rotițe și toți cilindrii care trebuiau să se îmbuce unul într-altul. Fiecare cilindru avea suprafața lui laterală împărțită în zece fîșii egale numerotate de la 0 la 9 în așa fel că atunci cînd un cilindru era învîrtit de 1/10 din lungimea cercului de bază, să se schimbe cifra

Mașina lui Pascal



pe care o purta pe banda respectivă și această schimbare să se poată observa printr-o ferestruică montată anume acolo.

— Vrei să spui că fiecare cilindru corespunde unui ordin din șirul de cifre din care e format numărul?

— Da, dacă de pildă avea de adunat numerele 6147 cu 568 atunci se învîrtea cilindrul miilor cu 6/10 de tur, cilindrul sutelor cu 1/10, următorul cu 4/10 și ultimul cilindru cu 7/10 de tur, iar în ferestruicile mașinii apărea numărul 6147. Apoi operația se repeta, dar înscrierea se începea de la unități: deci, primul cilindru din dreapta se rotea cu 8/10 și în ferestruică apărea astfel numai numărul 5, fiindcă un dispozitiv special trecea automat zecii reținuți de la un cilindru unităților, la cilindrul zecilor din stînga lui. Cum ți-am spus, Pascal avea 19 ani cînd tatăl său a primit în dar această mașină de la fiul lui.

— Pascal a făcut în adevăr o descoperire genială aceea de a arăta că munca intelectuală poate fi mecanizată!

— Și eu cred că el a fost conștient de valoarea descoperirii sale fiindcă a trimis un exemplar al mașinii lui de calculat, cu o scrisoare, reginei Christina a Suediei, considerată protectoarea savanților, deși, drept să-ți spun eu rămîn la convingerea că numai datorită acestei protecții înalte și-a găsit moartea Descartes! Nu știu dacă ea a dat atenția cuvenită acestei celebre invenții, dar vestea s-a răspîndit în lume cu iuțeală și numai peste 20 de ani S. Moreland construiește la Londra o mașină de adunat. La începutul veacului al XVIII-lea Academia de Științe din Paris își dă aprobarea pentru alte două mașini de adunat. Însă, în timp ce Moreland construia la Londra mașina sa de adunat, în Nüremberg sau Leipzig, sau poate chiar în timpul călătoriilor sale de la Leipzig la Nüremberg, Leibniz pregătea și mașina lui de calculat, care avea avantajul de a face nu numai adunări ci și înmulțiri. Desigur că este cu mult mai complicată decît aceea a lui Pascal, lucrează la ea vreo 25 de ani, și realizează două modele deosebite, al doilea însă a dispărut. Spre sfîrșitul veacului al XIX-lea, adică 200 de ani mai tîrziu, a fost publicat manuscrisul lui Leibniz în care sînt

descrise mai multe dispozitive de calculat dintre care unele au fost folosite de către fabricanții mașinilor de calcul ce au inundat piața în secolul nostru, mașini numite de obicei *aritmometre*.

— Odată comercializate, desigur că mașinile nu au mai rămas în preocuparea matematicienilor, ci a inginerilor, a constructorilor...

— Da, dar pînă ce au ajuns în această fază, construirea aritmometrelor a pasionat îndeajuns și pe matematicienii puri. N-am decît să-ți pomenesc numele marelui matematician rus P.L. Cebîșev care a construit primul aritmometru ce efectua automat înmulțirea și împărțirea!

— Ce înțelegi prin automat? Așa cum sînt executate azi de mașinile electronice?

— Nu, nu chiar așa, dar eliberînd atenția calculatorului, pe care celelalte mașini de calculat o țineau încordată. Ca să înțelegi mai bine am să-ți explic cum se făcea o înmulțire: întîi se scria în mașină deînmulțitul și înmulțitorul, apoi trebuia să se învîrtă de manivelă — pe rînd de atîtea ori cît arata fiecare cifră a înmulțitorului; se obțineau astfel întîi produsele parțiale și la urmă produsul total. Or, după ce un om a efectuat un număr de înmulțiri, atenția lui slăbește și poate greși numărul de învîrtituri; atunci înmulțirea dă un rezultat fals. Ca să se evite asemenea greșeli, la unele sisteme de mașini există o ferestruică în care se vede numărul de învîrtituri executat și astfel operatorul se poate controla. Vezi dar că atenția trebuia să fie mereu și continuu încordată. Ingeniozitatea lui Cebîșev constă în aceea că, după ce se înscriu numerele în mașină, operatorul învîrte de manivelă în mod continuu fără să mai numere de cîte ori, pînă ce în locul înmulțitorului apare peste tot zero. Un clopoțel indică terminarea acestor operații și totodată apariția rezultatului. Acesta și alte modificări au contribuit la perfecționarea mașinii și mai ales la scurtarea timpului de obținere a rezultatului. De exemplu, la unele aritmometre s-a aplicat un dispozitiv cu claviatură, astfel ca numerele să fie introduse prin simpla apăsare a clapelor, apoi apăsîndu-se pe un buton care corespunde operației de efectuat; mașina execută restul electric. Sînt mașinile sau aritmometrele de birou electrice, în care rezultatul unei înmulțiri destul de complicate se obține după o secundă de la pornirea mașinii. La Expoziția de mașini de calcul din Paris, deschisă în anul 1920, a făcut senzație mașina de calcul electromecanică „Automatica" construită de Torres y Quevedo.

— Spaniolul care a construit, pe la sfîrșitul veacului trecut, „Jucătorul de șah automat"?

— Da, acela. Interesant era faptul că mașina în care se executau operațiile era separată de aceea în care se făcea comanda operației și unde apărea rezultatul. Operația se imprima la o mașină de scris și răspunsul apărea îndată, scris în continuare. Așadar, mașina operatoare, ce se putea așeza undeva, chiar și în altă cameră, rămînînd doar legată de prima prin firele electrice, executa ea singură operația cerută și era prevăzută cu un dispozitiv care să transmită în scris rezultatul obținut.

Venirea nepotului meu, Nucu, a întrerupt discuția noastră. Ea a fost reluată, tîrziu, după cină, cînd Teodor Solonar a spus:

— Așteptîndu-te pe tine și în cinstea ta, dragă Nucule, în după-amiaza asta am încercat să urmărim prin ce mijloace au căutat oamenii din toate timpurile să înconjure, într-un fel sau altul, efortul calculelor, atunci cînd acestea sînt multe la număr și cu numere prea mari. Și așa, din vorbă în vorbă, am ajuns pînă la mașina electrică de calcul expusă la Paris, în 1920 de către Torres. Tu trebuie să știi mai bine decît mine cum arăta și cum funcționa.

— Abstracție făcînd de munca pe care o efectua, în raport cu randamentul mașinii electrice de calcul de azi, ea arăta ca un mastodont, față de un pui de elefant! Dar să nu credeți cumva că vorbesc despre mașinile electronice! Mă refer numai la acelea electrice, pentru că numai așa comparația poate fi valabilă.

— Cum adică? O mașină electronică de calcul stă pe alt plan decît o mașină electrică de calcul?

— Da, unchiule, căci aici progresul nu constă numai în perfecționarea acestora, ci în concepția cu totul nouă, care desparte mașinile electrice de calcul, așa-zisele *aritmometre*, de *calculatoarele electronice*! Dintr-un anumit punct de vedere, aș putea pune abacul pe același plan cu aritmometrul, fără să greșesc, dar aș face o greșeală grosolană în celălalt caz. Mi-aduc aminte, domnule Solonar, de bucuria pe care am avut-o în vara aceea cînd m-a luat unchiul cu dînsul la Cîmpulung și d-voastră mi-ați dăruit abacul și m-ați învățat să calculez cu el. Aveam 6 ani și d-voastră mă sileați să ne luăm la întrecere. Atunci nu gîndeam așa, dar azi știu bine că vă prefăceați că pierdeți, numai ca să capăt eu pachetul de ciocolată destinat învingătorului!

— A, nu-i așa și protestez cu vehemență! Dovada cea mai bună a fost azi dimineață cînd am înțeles cît de înfrățit ești tu cu calculatorul tău! Eu nu știu nici cum să pun mîna pe el, pasămite să-l fac să-mi răspundă!

— Cînd ne-a venit mașina asta de calcul la Institut și am fost repartizat să lucrez cu ea, m-am gîndit de multe ori la d-voastră, domnule Solonar, și de aceea am și ținut să veniți și să o vedeți. Cu cît mă obișnuiesc mai mult cu ea, îmi apare ca una dintre stîncile acelea pe care le întîlneam noi doi cînd ne afundam în pădure: ... la poale, susura pîrîiașul și d-voastră mă țineați de mînă și-mi arătați straturile suprapuse: vezi, Nucule, îmi spuneați, ai în fața ta urma multor mii și mii de ani. Timpul fuge, nu-l poți prinde, nu-l poți vedea, dar își lasă semne... Straturile acestea s-au depus pe rînd, n-au fost totdeauna pe stînci aici! Văd în calculatorul meu tot o stîncă, formată prin depunerea gîndurilor oamenilor, timp de mii și mii de ani. Cine știe dacă mi-ar fi așa de drag și m-ar emoționa atîta prezența lui, dacă nu m-ar fi cutremurat cîndva gîndul că miile de ani ți se pot dezvălui într-o clipită, cînd știi să le vezi!

Iartă-mă, unchiule, știu că nu-ți plac sentimentalismele, mai ales cînd ele deviază discuția. Dar uite că mă întorc la afirmația mea și voi încerca să arăt deosebirea de concepție dintre aceste două mașini de calcul. Să presupunem că avem de rezolvat o problemă care cere să se efec-

tueze o serie de calcule. Dacă am o mașină electrică de calcul obișnuită, înscriu în mașină calculele, fiecare pe rînd, și îmi notez pe o hîrtie, sau într-un caiet, rezultatele parțiale obținute, cu ajutorul cărora voi continua să efectuez mereu alte calcule ale căror rezultate le voi nota din nou pe hîrtie și așa, din aproape în aproape, am să găsesc soluția problemei. Desigur că mașina mea de calcul a fost de un ajutor neprețuit căci ea mi-a executat în cîteva minute calcule la care poate că zeci de calculatori, folosind abace sau chiar mașini de calcul manuale, ar fi trebuit să lucreze săptămîni întregi. Așadar am toate motivele să fiu mulțumit. Numai că...

— Da, știu, omul nu-i niciodată mulțumit cu ceea ce are.

— Nu că nu-i, dar nu poate fi mulțumit, dragă prietene, pentru că e depășit de propriile lui invenții.

— Are dreptate domnul Solonar. Problemele care se puneau pînă acum 15—20 de ani în urmă puteau fi rezolvate cu succes de mașinile electrice de calcul. Sînt și azi destul de multe probleme cărora ele le sînt de un real ajutor. Dar tehnica modernă cere ceva mai mult. Să luăm, de exemplu, problema determinării traiectoriei unei rachete teleghidate. Ca rezultatele obținute să aibă valoare practică, acestea trebuie efectuate tot așa de rapid, dacă nu chiar mai rapid decît timpul în care proiectilul se află în zbor prin spațiu. Or, calculele necesare în acest scop cer nu mai puțin de doi ani întregi de lucru pentru o echipă, care ar folosi cele mai rapide mașini electrice de calcul, înțelegînd nu numai mașini care să facă calcule numerice, ci și pe acelea mai complicate care rezolvă ecuații algebrice, ecuații diferențiale sau calculează integrale, diferențe, determinații și așa mai departe. Iată dar un exemplu cînd tehnica modernă nu mai poate fi satisfăcută de asemenea mijloace de calcul rapid. Calculele despre care am amintit sînt însă efectuate de o mașină de calcul universală electronică numai în două ore! Și cred că nu-i nevoie să mai vorbesc de calculatoarele de la centrul spațial de la Houston care au supravegheat nava spațială

Apollo-12 în zborul ei spre Lună. Ați urmărit aceasta din ziare și din programele de la Televiziune. Rămîne să vedem care-i deosebirea despre care am pomenit?

— Mi se pare că ne-ai îndrumat foarte bine ca să înțelegem această deosebire, atunci cînd ne-ai atras atenția că omul trebuie să-și noteze rezultatele calculelor parțiale ca apoi să continue el munca intelectuală care-l duce la rezultat. Adică să cîntărească rezultatele intermediare obținute, să aleagă pe cele potrivite de cele nepotrivite și chiar să schimbe metoda, dacă aceasta nu s-ar mai arăta favorabilă. Așa-i?

— Exact, unchiule, habar nu am avut pînă acum ce zace în mata! Credeam că specialitatea matale este să-mi faci morală!

— Îl vezi? Te poftesc să-i mai iei apărarea și de-acum înainte!

— Ori de cîte ori va fi nevoie, am s-o fac, fie că mă poftești fie că nu mă poftești! Și să știi că băiatul are și acum dreptate, așa că spune, Nucule, mai departe, cum își asumă mașina electronică rolul de creier, adică ia asupra sa întreaga muncă intelectuală a omului cerută de rezolvarea unei probleme, inclusiv luarea unei decizii mai favorabile în locul alteia mai puțin favorabile? Prin ce procedeu s-a stabilit analogia dintre creier și mașină?

— Ați ales foarte bine cuvîntul *analogie*, domnule Solonar, căci în adevăr numai de o analogie poate fi vorba și nu de o identificare structurală dintre creierul omenesc și cel electronic. Noi nu putem încă urmări pe de-a-ntregul mecanismul activității cerebrale din cauza complexității creierului omenesc, dar putem construi o mașină logică sau rațională.

— Cu condiția ca să-mi spui ce înțelegi printr-un *mecanism rațional!*

— În general, un mecanism se va numi rațional dacă reușește să atingă scopul pentru care a fost construit. Această definiție rezultă din analogia cu operațiile raționale

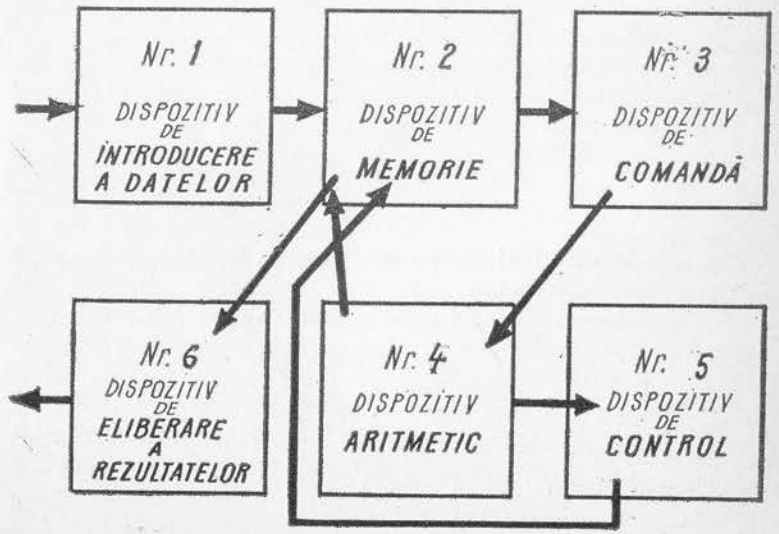
executate de om. Dar ca omul să dea o soluție rațională unei probleme propuse trebuie să aibă la dispoziția sa o anumită cantitate de informații. Aceste informații sînt analizate sau prelucrate în așa fel că dintre ele se aleg și se valorifică numai acele informații care sînt utile problemei considerate. În consecință, o mașină electronică de calcul trebuie să fie compusă din 3 părți principale:

1. *un depozit de informații*, pe care îl vom numi *dispozitiv de memorare*,

2. *un dispozitiv care să execute calculele*, adică *un dispozitiv aritmetic* și

3. *un dispozitiv de comandă* care să indice operațiile ce trebuie efectuate și unde trebuie ele depozitate. Acestea sînt părțile principale. Tot așa de indispensabile ca și acestea mai sînt și altele; le vom putea urmări mai ușor pe schema pe care am s-o desenez acum:

Fig. 29



Iată, să notăm cu nr. 1 dispozitivul de introducere a datelor problemei respective. Acestea formează stocul de informații pe care le are omul ce își propune o problemă, și pe care el le notează în caietul sau pe hîrtia sa de calcule, unde mai transcrie și rezultatele parțiale date de mașina electrică, cînd o folosește pentru calcule. De data aceasta, el nu mai are să execute nici un calcul. După ce înscrie datele inițiale, el trebuie să indice care este programul efectuării calculelor. Sînt mai multe metode de introducere în mașină a datelor inițiale și a programelor de calcul: cartele sau bandă perforată după un cod special, o bandă magnetică unde datele sînt reprezentate sub formă de impulsuri ca la un magnetofon, sau altfel. Nu are rost să ne pierdem în amănunte, mai ales fiindcă ele pot fi citite în orice carte despre calculatoarele electronice. Toate aceste informații ajung în dispozitivul nr. 2: Memoria calculatorului. Informația ajunsă în dispozitivul de memorizare a calculatorului este repartizată în diversele celule ale memoriei, toate numerotate așa fel ca la nevoie să poată fi folosite. Tot aici se trimit spre depozitare, în anumite celule, rezultatele ulterioare găsite de mașină prin calcul.

— Dar ce înseamnă să se trimită informații spre depozitare, ca să fie folosite la nevoie? Știu eu cum memorez și cum îmi vin informațiile la nevoie? Nu se întreabă oare Eminescu:

„Din ce noian îndepărtat
Au răsărit în mine?..."

Mașina imită deci un proces care se bănuiește doar că se produce așa, și nu altfel!

— Cu atît mai mult trebuie admirat omul care a fost în stare să depășească subconștientul fără să-i smulgă secretul!

— Desigur, domnule Solonar, așa se pune problema. După cum am spus în dispozitivele de memorizare sînt foarte variate și depind de construcția calculatorului. Cei ce lucrează cu calculatorul electronic trebuie să cunoască codul respectiv ca să poată întocmi, cu ajutorul lui, tabelul de co-

menzi sau programul mașinii, referitor la problema cercetată. De exemplu, la un moment dat în program se află comanda: „numărul din celula 745 se împarte prin numărul din celula 2006 iar rezultatul se trimite la celula 831". Programul, după care va lucra mașina, se transmite spre păstrare tot în memoria mașinii, într-un loc aparte. Să numim deci nr. 3 dispozitivul de comandă care asigură procesul de rezolvare automată a problemei. De aici pornesc comenzile spre nr. 4: dispozitivul aritmetic, adică înspre calculatorul propriu-zis, unde se efectuează operațiile prescrise. Vreți să știți cu ce repeziciune? Uneori cîte 10 000 de operații pe secundă, alteori mai mult.

— Și adică, nu s-ar putea ca, la un moment dat, să se defecteze mașina iar rezultatele pe care le furnizează să fie halandala?

— Ba da! Ca să se evite asemenea greșeli și să se oprească depozitarea rezultatelor false, există dispozitivul nr. 5 de control. Și pentru acest dispozitiv este prevăzută o programare specială de confruntare a rezultatelor obținute, fie făcîndu-se calculele prin altă metodă, fie stabilindu-se, printr-o confruntare logică, veracitatea lor. Abia după acest control rezultatul este trimis, spre depozitare, în memoria mașinii. Cînd toate comenzile de calcul și verificare au fost executate, intervine comanda de furnizare a rezultatelor, din dispozitivul nr. 6, și apoi de oprire a mașinii. Cam asta-i tot, în linii foarte generale.

— Acum să vedem dacă am înțeles cele ce mi-ai spus: Cînd i se pune o problemă, operatorul stabilește metoda de rezolvare sub forma unei succesiuni de operații care trebuie transmise mașinii după un anumit cod. Asta-i programarea. Mă întreb numai dacă această programare nu cere un timp prea îndelung pentru a o realiza în toate amănuntele ei, și dacă, odată realizat, programul însuși nu-i prea voluminos?

— Întrebările matale, dragă unchiule, sînt foarte judicioase. Tocmai aici se vădește superioritatea mașinilor electronice și rostul programării. Matale, unchiule, îți închipui că o programare se face urmînd metoda cuiva care ar folosi

o mașină electrică de calcul: se termină o serie de operații, se ia creionul, și se notează, apoi încep celelalte ș.a.m.d. cu singura deosebire că, în loc de a se nota rezultatele pe hîrtie cu un creion, ele sînt depuse în memoria mașinii?

— Exact, așa am înțeles din cele ce mi-ai spus.

— Poate e și vina mea că n-am putut explica mai bine, dar trebuie să știi că procesul de programare este mult simplificat prin aceea că se asigură un foarte mare număr de operații aritmetice printr-un număr mic de comenzi. E greu să intrăm în amănunte, acestea le învață operatorul în scopul programării, dar aș putea să adaug că tot în vederea rapidității o comandă se compune din mai multe părți, fiecare avînd o misiune specială. O parte a comenzii determină felul operațiilor ce trebuie executate de calculator; aceasta se numește codul operației; alte părți ale aceleiași comenzi arată unde se găsesc numerele asupra cărora trebuie executată operația și locul unde trebuie să fie transmis rezultatul cînd operația se termină; acestea sînt adresele. Mai mult, uneori există și comenzi pentru executarea unor operații logice prin care să se schimbe, dacă e necesar, însă și ordinea de transmitere a comenzilor. Aceasta se întîmplă la compararea a două variante și alegerea celei mai avantajoase, care se stabilește în urma rezultatelor intermediare provenite din anumite ramificații pe parcurs.

— Doar nu ai de gînd să-mi spui că mașina ta gîndește singură, că ea singură are inițiativa și că eu sînt la cheremul ei!

— Nu-s la cheremul ei, unchiule, dar încolo e așa cum ai spus. Ea gîndește pentru mine, cu mult mai repede decît mine și fără să ezite, cum aș face, poate, eu. Dar trebuie să adaug că ea gîndește ceea ce eu i-am programat să gîndească, că eu am prevăzut toate variantele posibile ale problemei, după cum se va ivi o împrejurare sau alta:

În cazul A se va aplica formula X, în cazul B se va aplica formula Y. Te-ai putut de altfel convinge singur, dacă ai urmărit zborul acelei nave spațiale Apollo-12! Fără calculatoarele electronice, niciodată nu s-ar fi putut realiza

aceste zboruri, atît din cauza volumului de calcule, pe care mașinile electrice obișnuite, oricît de rapide ar fi fost, nu le-ar fi putut executa decît într-un timp prea îndelungat ca să mai prezinte vreun interes practic, cît și din cauza deciziilor rapide pe care omul nu le putea lua! Mașina nu poate inventa ea singură nimic, dar îmi poate alege și furniza datele la care eu nu aș avea posibilitatea să ajung nici într-o viață întreagă.

— Vezi, dragă Nucule, eu n-aș afirma cu atîta hotărîre că mașina nu va fi cîndva în stare să inventeze și singură! Cine știe dacă omul nu va putea duce automatele la o atare perfecțiune încît acestea să aibă inițiativă proprie, să stabilească soluții originale? Dar să fim înțeleși, nu în mașină am eu această încredere, ci în om! Iată, mi-ai adus aminte de un strașnic articol al Acad. prof. Octav Onicescu: *Omul și automatele*, pe care l-am citit, acum un an sau doi, într-unul din volumele intitulate: *Probleme actuale de matematică*. Aici autorul sugerează ideea construirii de *mașini care învață*. Ideea nu pare deloc fantastică fiindcă are la bază o analogie dintre cele mai plauzibile, calculatorul electronic fiind comparat cu un reactor atomic. Așa după cum calculatorul reacționează cînd omul introduce problema și stabilește rezultatul, în reactorul atomic, în care mărimea lui nu depășește dimensiunile critice, dacă un neutron pătrunde din exterior se produce o reacție care se neutralizează. Însă dacă mărimea reactorului depășește dimensiunile critice, atunci neutronul introdus ar putea provoca o reacție în lanț, adică ar putea crea ceva nou. Prin analogie deci, crearea unei mașini electronice în fază supracritică... Știu, Nucule, ce vrei să mă întrebi, dar n-are rost, căci nici autorul și cu atît mai puțin eu, nu aș putea să-ți spun ce se înțelege prin acea *fază supracritică*, care nu-i deloc exclus să nu se înfăptuiască...

Și mai interesantă mi-a părut o a doua problemă discutată în acel articol, anume dacă inteligența umană, creierul omenesc, nu s-ar putea depăși pe sine cu ajutorul automatelor?

— Bine, dar, cu sau fără automate, omul progresează mereu.

— Nu, nu-i vorba de acest progres normal, ci de un altul, de o depășire dinainte stabilită, după anumite reguli, date de o știință stabilită anume, pentru care Acad. Onicescu creează și un termen adecvat *Anticibernetica*, tot așa după cum André Malraux a creat cuvîntul *Antimemorii!* După cîte îmi amintesc cuvîntul avea următoarea justificare: Cibernetica are ca obiect perfecționarea automatelor după modelul sistemului nervos central al ființelor vii; Anticibernetica va avea ca obiect perfecționarea omului, și a altor ființe vii, în special a creierului ca organ de gîndire, control și conducere, pe baza datelor furnizate de mașinile electronice!

— Nu cunosc articolul, dar am auzit și eu despre această problemă, domnule Solonar. E foarte adevărat că prin construirea mașinilor electronice care își propun să imite, cel puțin în parte, funcțiunile creierului, procesul efectiv de construire a acestor mașini a făcut lumină în unele probleme neclare pînă atunci, în ceea ce privește activitatea cerebrală. M-ar interesa acest articol...

— Și pe mine. Mai am eu unul de citit dar pe acela cred că-l dau gata în noaptea asta sau mîine dimineață, așa că, dacă poți, cît mai stai pe aici...

— Bine, am să aduc cartea de la Seminarul Matematic, dar am s-o dau întîi lui Nucu, ca fiind de specialitate... Cred că la amîndoi are să vă facă mare plăcere și discuția despre geniu, despuiat de catifeaua miraculosului și privit pur și simplu ca munca prin care se reușește să se prelucreze și să se valorifice cantitatea necesară de informații cu privire la o problemă dată!

— Am fost totdeauna de părerea asta și am considerat că o inteligență se arată cu atît mai ascuțită cu cît știe ce trebuie să aleagă din mulțimea cunoștințelor pe care le poate avea într-o anumită chestiune. De aceea cred că Anticibernetica poate fi o problemă a viitorului.

— În sprijinul ei vin și mașinile care îl ajută pe om să învețe, pînă ce vor fi în stare să învețe și ele singure! Mașinile

care ajută la învățarea limbilor, acelea care sînt introduse în unele școli experimentale, pentru predarea anumitor obiecte...

— Parcă nu-mi vine să cred că în după-amiaza asta am început, așa în glumă, să vorbim despre abac și acuma ne frămîntăm mintea cu mașinile electronice de calcul. Vinovat de plăcerea asta ești tu, Nucule!

— Se putea să nu-mi găsești mata o hibă, unchiule, cred că s-ar face o bortă-n cer, dacă ar fi altfel!

— Mă întreb și eu dacă s-ar putea să nu ai și tu ultimul cuvînt? De-ar fi altfel nici tu n-ai fi tu!

— De data aceasta însă, unchiule, nu vreau să am eu ultimul cuvînt, ci *Arghezi*. Am să-i amintesc domnului Solonar, fiindcă mi se pare că se potrivește numai bine, cîteva versuri dintr-o poezie pe care am învățat-o tot la Cîmpulung, odată cînd urcam amîndoi pe Runc. D-voastră mi-o spuneați și eu o repetam, vă amintiți?

„Cel ce gîndește singur și scormone lumina
A dat o viață nouă și-un om de fier, mașina.
Ființă zămislită cu gîndul și visarea,
Ne-nchipuit mai tare ca brațul și spinarea".

ÎNCEPUTURILE CALCULULUI DIFERENȚIAL

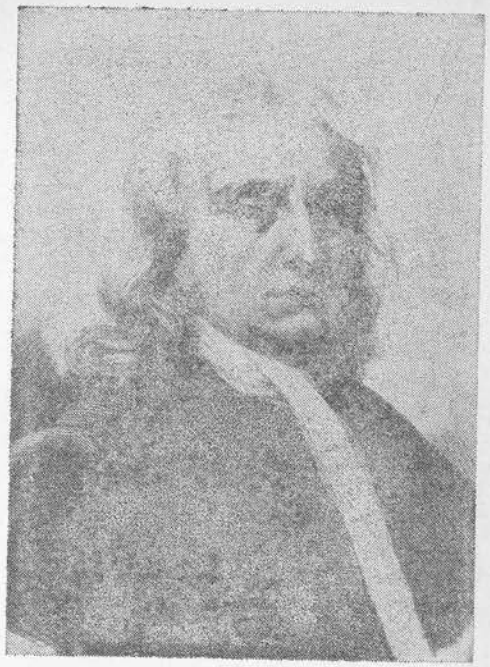
sau

Cînd doi se ceartă al treilea cîștigă

— Nu-ți poți închipui cu cît interes și plăcere am citit cartea adusă de tine, astă toamnă, de la Paris, mi-a spus într-o dimineață Teodor Solonar, pe cînd se mai afla la mine în vizită. Afară viscolea așa de tare că am hotărît să amînăm plimbarea proiectată în ajun. Am înțeles îndată că în mintea prietenului meu se frămînta o nouă problemă, așa că l-am întrebat la ce amănunte anume din cartea lui Temple Bell „Les grands mathématiciens" făcea aluzie,

— Dacă ar fi să ți le înșir pe toate, mi-a răspuns el, m-ar apuca primăvara aici. Însă, privind cum se izbesc și se învălmășesc vîrtejurile de zăpadă, cine știe prin ce asociație de imagini, mi-am adus aminte de faptul că Temple Bell menționează o anumită scrisoare a lui Newton, descoperită abia în 1934 de profesorul More. Se întîmplase să fie atunci, cînd am luat cunoștință de ea, o zi însorită și eu eram atît de tulburat că am lăsat cartea și am pornit spre pădure. Foșneau frunzele sub picioarele mele și eu călcam anume unde era grămada mai mare pînă m-am trezit, hăt departe, spre Tomnatec. Chiar și acum m-a cuprins iarăși tulburarea. Îmi vine să mă amestec în viforniță de-afară!

— Ba eu te rog să rămîi aici și să-mi spui și mie ce cuprindea scrisoarea aceea. Fiind vorba despre Newton, era ceva în legătură cu legea gravitației universale?



Isaac Newton

— A, nu! Scrisoarea asta parcă a fost găsită anume, ca să mai ilustreze o dată proverbul nostru: „cînd doi se ceartă al treilea cîștigă". Numai că, de data asta, toată povestea este așa de fantastică, cei doi care se certau nu erau, de fapt, chiar ei aceia care se certau, cearta dintre ei a continuat și după ce ei nu mai trăiau iar cel ce cîștigă acum, după 3 secole, murise cu mult înainte de a fi început această ceartă, așa că nici n-a știut de existența ei!

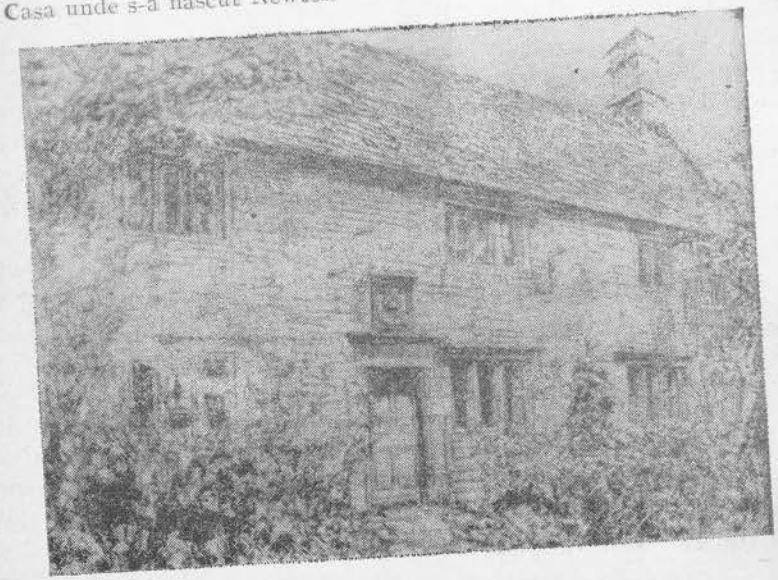
— Măi bădiță Teodor, ce-ar fi dacă n-ai mai face-o mata așa pe misteriosul, ca într-o povestire cu suspense și mi-ai spune pe șleau, de la începutul începutului. Vreme avem; cafeaua vine îndată, și pînă atunci te poftesc să-ți faci un plan, așa, mai gospodăresc.

— Să nu-ți închipui că ai glumit, îndemnîndu-mă să-mi fac un plan, a început Teodor Solonar, cînd m-am așezat la masă, alături de el. Am nevoie de unul, și nu știu dacă l-am închegat cum trebuie, ca să-ți pot descrie faimoasa ceartă care a izbucnit, ca din senin, între Newton și Leibniz, cu privire la dreptul de prioritate la descoperirea calculului infinitezimal.

— Despre Isaac Newton știu că s-a născut, înainte de termen, chiar în anul în care a murit Galileu. Era un copil așa de plăpînd că nu se știa dacă va supraviețui.

— Un amănunt nou, pe care-l dă Bell: Mama lui spunea că era așa de mic că ar fi încăput într-o oală de 1 litru! De altfel, din punct de vedere fizic a rămas slab dezvoltat. Probabil că de aceea a fost și timid iar în copilărie a trăit izolat, căutîndu-și singur distracțiile.

Casa unde s-a născut Newton



— Dar distracții demne de viitorul Newton: O moară care să macine cu adevărat boabe de grîu, avînd ca motor un șoarece adevărat, sau un zmeu cu o luminare aprinsă de care se speriau țăranii, cînd treceau noaptea prin dreptul fermei în care locuia el, un ceas de lemn și un cadran solar... Aș putea să folosesc și eu un proverb: „ziua bună se cunoaște de dimineață".

— E foarte adevărat dar n-aș vrea să zăbovim printre jucării. Mai bine să ne apropiem de amiază. În 1661, pe cînd avea 19 ani, a intrat ca elev la Trinity College din Cambridge; neavînd bani de taxe, plătea în natură, adică executa diverse munci manuale. Nu chiar din primul an dar din cel următor, Newton are norocul să fie elevul unuia dintre cei mai strălucitori savanți și profesori de atunci, pe nume Isaac Barrow. Acesta a remarcat de îndată stofa pe care o are în mînă și s-a străduit să-i dea o croială impecabilă. Căci trebuie să știi că mijlocul veacului al XVII-lea a fost un prag de trecere de la o matematică bazată pe metodele an'ice, dezvoltate și aplicate în epoca Renașterii, înspre o matematică modernă, clădită pe doi piloni noi, unul bine consolidat: geometria analitică și altul care se clădea atunci: analiza infinitezimală. Barrow era la curent cu aceste frămîntări, el însuși fiind unul dintre acei ce înfăptuiau această transformare înspre modernism. Cursul lui de geometrie o dovedește cu prisosință. De pildă, una dintre problemele cele mai remarcabile și la modă atunci era aceea a determinării tangentei într-un punct dat la o curbă desenată în mod continuu și fără buclă sau nod. După cum bine știi, geometria lui Euclid te învață cum să duci tangenta la un cerc. Atît și nimic mai mult.

— Vrei să spui că la cerc pot duce cu ușurință tangenta, fiindcă ea este perpendiculară pe rază la punctul de contact? Desigur, așez echerul cu vîrful unghiului drept pe cerc și dacă una dintre catete trece prin centrul lui atunci cealaltă catetă este tangentă la cerc. Dar dacă mi se dă o curbă oa-

recare C (fig. 30) adică e așa de greu să-i duc tangenta? Uite, o duc în punctul P. Este PT. Nu-i bine?

— Nu. După mine, cred că mai degrabă PT′ ar fi tangenta adevărată. Cum mă poți convinge că ai dreptate tu și nu eu, sau nici unul?

— Da, aici e cam așa! Cele două puncte confundate din P sînt de fapt unul singur și atîta nu-i de ajuns ca să stabilesc poziția unei drepte. La cerc, pe lîngă punct mi se dă direcția dreptei, în cazul unei curbe oarecare ar trebui să cunosc un al doilea punct al tangentei. Aceasta-i problema?

— Da, și întrebarea-i cum se determină al doilea punct? Problema era atunci de o mare actualitate deoarece Geometria analitică deschisese drumul pentru studiul curbelor, cel puțin ale acelora care se puteau exprima printr-o ecuație și astfel în sistemul de coordonare cartezian puteau fi construite prin puncte. Nu-ți mai spun că de multe ori interveneau curbe cu aplicații practice în mecanică, în astronomie, arhitectură și alte domenii. De altfel problema aceasta mai are încă un alt aspect, anume stabilirea punctelor de maxim și minim ale curbei.

— În adevăr! nu m-am gîndit niciodată ce simplu apar ele! Punctele de maxim și minim sînt acelea în care tangenta este paralelă cu axa x′x.

— Ei vezi! Aceste lucruri sînt acum așa de elementare, că pot fi predate în școala medie, atunci însă savanți pe

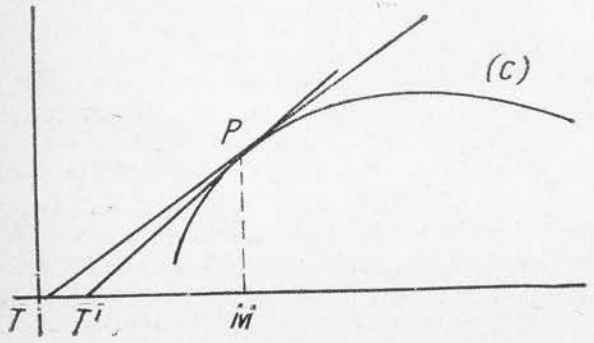


Fig. 30

care-i admirăm și azi, considerau metoda ca o descoperire așa de subtilă, încît puțini erau aleșii care să o poată cunoaște și aplica. Această problemă este de altfel echivalentă, din punct de vedere geometric, cu problema fundamentală a calculului diferențial. Ei, dar acum să revenim la tangenta, la curba (C) în punctul P. Ca să putem decide care este tangenta ar fi de ajuns să știm dacă punctul T sau T′ este cel ce aparține tangentei, sau, ceea ce este același lucru, să stabilim care-i subtangenta la curbă în P: MT sau MT′. Or, cum putea fi stabilit acest lucru, îl descoperise prin 1629 marele matematician francez Pierre de Fermat. El nu a publicat niciodată nimic însă, peste vreo 10 ani metoda sa era cunoscută aproape de către toți matematicienii de atunci, fiindcă el o comunicase într-o scrisoare adresată lui Descartes. În treacăt îți spun că Descartes, supărat de mai înainte pe Fermat, nu a dat prea multă atenție acestei metode, ceea ce a provocat un nou motiv de ceartă!

— Cunosc bine moda acestor neînțelegeri dintre savanții de atunci! Era un prilej de distracție! Scrisorile lor erau copiate și trimise cu rapiditate la toți cei interesați. Imediat se formau două tabere care se războiau, pînă se obținea împăcarea părților!

— Da. În acest caz de împăcare, Fermat a numit cearta: „micul meu război cu Dl. Descartes", iar Descartes „micul meu proces matematic contra D-lui de Fermat". Important este că *metoda de a duce tangenta* sau încă *metoda de maxim și minim* o aflase și tînărul profesor Isaac Barrow, venit la Cambridge întîi ca profesor de greacă și apoi, din 1663, ca profesor de geometrie. În chiar acel an Isaac Newton devenea elevul lui Barrow și învăța de la el taina tainelor: cum se află subtangenta unei curbe, exprimată prin ecuația ei $y = f(x)$ într-un punct P de pe curbă, de coordonate (x,y).

— Ei, cum?

— Îți spun exact așa cum scrie în cursul lui Barrow (fig. 31). Ca să se determine subtangenta în punctul P se consideră un punct Q vecin cu P, coordonatele lui fiind $(x-e, y-a)$. Se formează un *triunghi diferențial PRQ*, numit astfel pentru că laturile lui PR și QR sînt diferențele

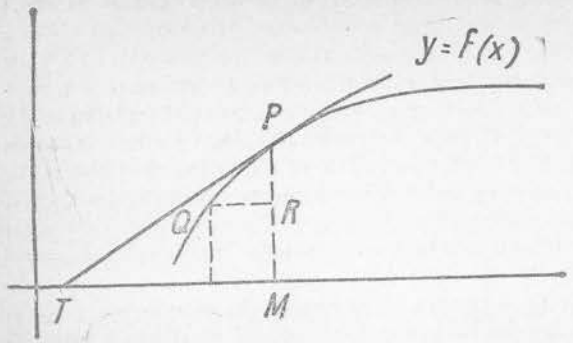


Fig. 31

dintre ordonatele și abscisele punctelor P și Q. Acest triunghi este asemenea cu triunghiul PMT, de unde rezultă:

$$\frac{TM}{PM} = \frac{QR}{PR} = \frac{e}{a} = \frac{TM}{f(x)} \text{ și deci } TM = f(x) \cdot \frac{e}{a}$$

iar raportul $\frac{e}{a}$ se află ușor din ecuația curbei date $y = f(x)$.

— Cum vine asta, ușor? În ecuația $y = f(x)$ voi înlocui pe x cu x—e și pe y cu y—a și apoi voi face calculele indicate. Dacă ecuația este de forma unui polinom, bagă de seamă că admit forma cea mai simplă, tot vor fi ridicări la pătrat, la cub, prin urmare se obține o ecuație în $\frac{e}{a}$ de gradul doi, trei sau mai mult. Cum o rezolv?

— Știi că mă înspăimînți? Admir exigența ta, însă aici nu-și are rostul fiindcă toate puterile lui e și a, în afară de prima se neglijează. Cu alte cuvinte obții o ecuație de gradul întîi în e și a, anume omogenă, ceea ce permite să afli raportul $\frac{e}{a}$. Neglijarea puterilor superioare este permisă pentru că punctele P și Q se consideră foarte apropiate. De altfel numai în acest caz triunghiurile considerate sînt asemenea. Nu uita că sîntem înainte de a se fi descoperit Calculul diferențial, iar această neglijare a termenilor este antemergătoare procesului de trecere la limită, pe care-l folosim azi!

Dar ai mai atacat o problemă extrem de importantă, aceea a naturii ecuațiilor. Cu metodele de calcul de atunci, matematicienii nu se puteau avînta la orice fel de funcții. Nici binomul nu se putea dezvolta decît la puteri întregi. Newton va stabili, desigur intuitiv, adică fără o demonstrație riguroasă, formula dezvoltării binomului la o putere fracționară și, tot pe vremea lui, el și alții vor încerca dezvoltarea în serii de puteri ale funcțiilor transcendente ca sin x, arc tg x, log x și altele.

— Cum s-ar spune, ei derivau înainte de a ști că derivează?

— Da. Noțiunea și procesul de trecere la limită vor fi prezentate și folosite în mod curent abia de către Newton și Leibniz. Aplicînd trecerea la limită, se va defini, — desigur, sub o formă încă rudimentară, — derivata unei funcții. Căci, noțiunea riguroasă de derivată a unei funcții și condițiile ei de existență se vor lămuri mai precis în cursul veacurilor XVIII și XIX. Așadar, revenind la elevul Newton, el învăța metoda de a construi tangenta la o curbă de la Barrow în timp ce își trecea bacalaureatul, Barrow considerîndu-l ca cel mai bun elev al său. Deși el a continuat studiile, tot aici și ca student, în 1665 a fost nevoit să se întoarcă acasă fiindcă la Cambridge izbucni o epidemie de ciumă și toate școlile s-au închis. Pentru Newton era tocmai timpul potrivit să aibă răgazul de a medita în liniște la toate problemele mari cei se conturaseră, ascultînd cursurile lui Barrow sau citind atît operele marilor matematicieni greci și moderni. Printre acestea erau „Optica" lui Kepler, „Arithmetica infinitorum" a lui Wallis, profesor pe atunci la Oxford, „Geometria" lui Descartes și altele. Dintr-un manuscris al lui Newton s-a putut stabili că la acea dată el a generalizat formula binomului $(a+b)^n$ pentru un exponent „n" rațional, pozitiv sau negativ.

— De aceea se spune acestei formule „binomul lui Newton"?

— Într-un fel, da, cu toate că pentru valorile întregi ale exponentului formula binomului fusese cunoscută cu mult

înainte. Newton aplica formula cînd exponentul avea valori negative sau fracționare, adică la formule de felul

$$\frac{1}{(a+b)^n} = (a+b)^{-n} \text{ sau } (a+b)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a+b)^p}$$

În aceste cazuri, nu-i deloc evident că se poate face dezvoltarea la fel ca în cazul lui n întreg, fiindcă numărul termenilor din binom devine infinit. Newton folosește dezvoltarea într-o formă mai mult empirică sau intuitivă. Adevărata demonstrație asupra valabilității acestor formule va fi dată mult mai tîrziu, după ce se va fi ajuns la o teorie riguroasă asupra seriilor de puteri. Însă atunci descoperirea lui Newton era extraordinar de prețioasă, căci prin ea se putea extinde studiul funcțiilor dincolo de funcțiile algebrice, considerate de Descartes. Dar mai erau și problemele de optică care-l pasionau pe Newton încă din copilărie. După ce Galileo a descoperit luneta, șlefuirea lentilelor a devenit ocupația de predilecție a celor mai mulți oameni de știință. O practica cu asiduitate și Newton. Căutînd să corecteze fenomenele de irizare ale imaginilor, care se produceau la telescoapele cu refracție, el a descoperit toate proprietățile luminii albe. Le cunoști prea bine, ca să ți le mai spun și eu. În fine, tot în acel an de vacanță el a intuit și legea gravitației universale. „Am început să mă gîndesc atunci că gravitația se întinde pînă la orbita Lunii", spunea el, amintindu-și de acele timpuri și continua: „folosindu-mă de legile lui Kepler am dedus că forțele care țin planetele pe orbite trebuie să fie în raport invers cu pătratele distanțelor lor la centrul în jurul cărora se învîrtesc. Adică am comparat forța de gravitație a pămîntului cu aceea care ține Luna pe orbita ei".

— Cum? toate aceste idei grandioase i-au venit în minte așa deodată, cînd era încă așa de tînăr?

— Stai, că n-am terminat! Am lăsat la urmă problema despre care intenționez să vorbim, aceea a *calculului infinitezimal* sau a *calculului fluxiunilor*, cum a fost numit de Newton.

— Bine, dar în latinește, *fluere* înseamnă *a curge*. Nu înțeleg ce are curgerea cu calculul infinitezimal?

— Iacă are! Pentru Newton orice curbă era imaginea idealizată a unui pîrîiaș, adică se forma prin mișcarea continuă a punctelor sale ca și un pîrîiaș, prin curgerea continuă a stropilor de apă. În „Tratatul asupra cvadraturii curbelor" o spune el însuși cam așa: „Eu nu consider mărimile matematice ca formate din părți oricît de mici ar fi ele, ci ca descrise printr-o mișcare continuă. Considerînd deci că mărimile care cresc în timpuri egale sînt mai mari sau mai mici, după cum cresc cu o viteză mai mare sau mai mică, am căutat o metodă care să stabilească mărimile după viteza creșterilor care le formează și numind *fluxiune* vitezele acestor creșteri, în timp ce mărimile născute iau numele de *fluente*, am stabilit metoda fluxiunilor."

— Așadar, dacă $y = f(x)$ este funcția dată, *variabila x este fluenta* iar *derivata funcției* — fiindcă știu că viteza este derivata — este numită fluxiune. Dar funcția nu avea și ea vreun nume special?

— Ba da, funcția era numită *genita* însă și *fluenta*. După cum observă Oscar Becker în „Fundamentele matematicii", pe care o cunoști, termenii arată influența literaturii medievale: forma *fluens* precum și *fluxus formae* sînt expresii adesea întîlnite acolo. Trebuie să știi că termenul de funcție a fost introdus în matematici de Leibniz, în 1692, dar peste vreo 50 de ani Euler va lămuri semnificația analitică a expresiei $y = f(x)$ și vor mai trece încă 100 de ani pînă cînd Dirichlet va preciza ceea ce se înțelege azi prin funcție. Ți-am spus toate acestea ca să vezi cum se face matematica și să nu crezi că un termen, așa de banal azi, ca cel de funcție, a circulat cu aceeași dezinvoltură și acum vreo 130 de ani, să spunem. Newton înțelegea prin *fluente „mărimi născute"*, adică variabilele dependente și independente. Dovadă, în exemplul considerat de el ca să stabilească derivata funcției x^n. El spunea: „fie cantitatea care curge uniform x, să se găsească fluxiunea cantității x^n". Meritul lui Newton, ca și al lui Leibniz, nu stă în lămurirea acestor noțiuni, nici măcar a aceleia de continuitate, pe care o folosea așa de des, ci că au introdus *calculul cu mărimile infinit de mici* și *procesul de trecere la limită*, cînd aceste mărimi infinit de mici, cu

care s-au făcut operațiile algebrice pînă la un moment dat, deveneau egale cu zero.

— Interesant. Am impresia că prin această terminologie se trădează atitudinea lui Newton față de matematici. El nu le considera ca un scop în sine, ci, mai degrabă, ca un instrument de exprimare și de cercetare a fenomenelor naturii.

— Cam așa. Arago o și spune limpede, afirmînd că primul titlu de glorie al lui Newton este teoria gravitației universale, iar descoperirile lui matematice vor rămîne numai ca al doilea titlu la imortalitate! El se baza și pe faptul că, deși Newton a descoperit calculul infinitezimal încă din 1665 și era conștient de importanța acestui fapt, nu s-a grăbit să-l facă cunoscut decît în 1687 și atunci nu pe acesta în sine, ci doar ca un capitol din celebra operă „Philosophiae naturalis principia mathematica".

— Stai, bădie! Oare ai uitat că am traducerea românească a acestei opere, apărută acum vreo 13 ani la noi, datorită entuziastului traducător profesorul *Victor Marian* de la Cluj?

— Ba nu. Pot să adaug că *Acad. Victor Vîlcovici* a ajutat și el, revăzînd textul. De ce mă întrebi?

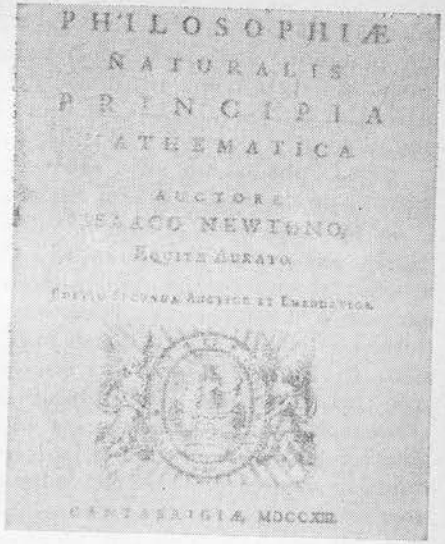
— Pentru că era mai normal să-i spui titlul în românește: „Principiile matematice de filozofie naturală!"

— Hai să răspund la răutate cu răutate. Te întreb, ai citit-o sau ai rămas cu lectura celor 5 prefețe și a Odei lui Edmund Halley, pe care le-am citit atunci împreună?

— Asta nu face parte din subiect! Te rog să-mi spui ce a făcut studentul Newton, cel cu capul plin de atîtea formule și descoperiri, cînd a încetat ciuma și au început iar cursurile?

— Întrebarea ta cuprinde și răspunsul la întrebarea mea. Pune cartea pe masă, să ți-l arăt!

Nu mă puteam opune dorinței prietenului meu. După ce i-am adus cartea și a răsfoit-o puțin, am citit la pg. 426 eu însumi: „În 1667 Newton luă ultimele grade universitare și se stabili la Cambridge. În cei doi ani ce urmează revăzu cursul lui Barrow, care apăru în 1669 sub titlul de *Lectiones Opticae et Geometricae*. În octombrie 1669 Barrow


PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA
AUCTORE
ISAACO NEWTONO
EQUITE AURATO
CANTABRIGIÆ, MDCCXIII.

Pagină din opera lui Newton

renunță la catedra de matematici în favoarea lui Newton, care o ilustrează pînă în 1696. În 1670 el începe să expună, într-un curs sistematic de analiză prin serii infinite, descoperirile sale din acest domeniu, care apărură ca apendice la Optica sa din 1704". Nu înțeleg, i-am spus eu, prietenului meu, oprindu-mă din citit, Newton a predat cursuri de matematici sau de fizică?

— Și de una și de alta, fiindcă pe atunci nu exista o delimitare a acestor domenii ca acum. Matematici, fizică, chimie sau mai bine zis alchimie — și cu ocazia aceasta află că Newton, ca și Leibniz, a fost un alchimist pasionat în tinerețea lui, — toate erau predate de un singur profesor, în cadrul Facultății de filozofie. De cele mai multe ori același profesor preda și astronomia, dacă nu chiar astrologia! Newton, care făcuse acele extraordinare descoperiri din optică, începînd cu descompunerea luminii albe, și a căutat o explicare a fenomenelor luminoase, imaginînd teoria corpusculară a luminii, putea să nu vorbească studenților lui despre aceste probleme? Tot el a imaginat și

a construit primul telescop cu reflexie cu care, împreună cu prietenul lui de atunci, astronomul *John Flamssteed*, observa sateliții lui Jupiter, tot în vederea verificării legii atracției universale, la care lucra încă. În 1672 a fost numit membru al Societății Regale din Londra.

— Ai spus că nu s-a grăbit să-și publice descoperirile, atunci pe ce bază s-a făcut această numire?

— Pe baza telescopului pe care l-a construit. Vestea existenței lui s-a răspîndit îndată în Londra și secretarul de atunci al societății, savantul *Heinrich Oldenburg*, i-a scris o scrisoare și i-a cerut să-l prezinte Societății. Atunci Newton a mai construit un al doilea exemplar pe care l-a trimis la sfîrșitul anului 1671 în dar Societății, cu schema și descrierea lui. Lucrarea s-a publicat de îndată în *Philosophical Transactions* din Londra, iar el a fost declarat membru al acestei înalte Societăți științifice. În urmă, Newton își trimite rezultatele experiențelor sale din optică și totodată formulează teoria corpusculară a luminii cu care propune o explicare a acestor fenomene. Desigur că această teorie a găsit nu numai admiratori, ci și foarte mulți care să o critice, dat fiind că, tot pe atunci, Huygens și Robert Hooke prezentaseră și susțineau teoria ondulatorie a luminii. Discuțiile pro și contra s-au purtat în revistele științifice timp de vreo 4 ani, ceea ce l-au cam sîcîit pe Newton. Într-o scrisoare din 1676, adresată tot lui Oldenburg, Newton scria că nu va mai publica nimic și că nu va mai lucra decît pentru plăcerea lui personală, terminînd astfel: „văd că omul trebuie să se decidă, sau să nu inventeze nimic sau să devină sclavul descoperirilor sale, ca să le poată apăra".

— Și s-a ținut de cuvînt?

— Da. Timp de 11 ani, pînă în 1687, nu a mai publicat nimic din descoperirile sale și sînt convins că nici după aceea nu ar fi făcut-o dacă nu ar fi intervenit prietenul lui, matematicianul și astronomul *Edmund Halley*. El a stăruit atîta pînă l-a convins să-și întocmească pentru publicare cursul său de Mecanică cerească, bazat pe principiul gravitației universale, curs pe care l-a predat între

anii 1684—1687. Cu tipărirea lui s-a angajat însuși Halley care a suportat chiar o parte din cheltuieli deoarece suma pusă la dispoziție de Societatea Regală nu a fost suficientă.

— Atunci de ce nu a intervenit Halley mai de mult?

— Pesemne că nu-i venise ceasul! În realitate, la mijloc a fost o poveste întreagă, am să ți-o spun în cîteva cuvinte: Problema gravitației a preocupat pe mulți și cu mult înainte de Newton. Ar fi de ajuns să-ți amintesc numai de Kepler care a stabilit legile după care se rotesc planetele în jurul Soarelui. Crezi că numai o dată și-a pus el întrebarea asupra cauzei care le face să se rotească în jurul Soarelui? Newton a atacat o problemă despre care se discuta mult pe atunci, atît la Cambridge cît și mai ales la Londra, unde Robert Hooke, unul dintre membrii cei mai străluciți ai Societății regale, prezentase în 1666 o primă comunicare în legătură cu forța gravitației. Mai tîrziu, în alte comunicări el arăta că forța de gravitație ar putea să se exercite ca un fel de radiație invers proporțională cu pătratul distanței. Între timp Newton făcuse cunoștința lui Hooke și se războia cu el în privința compunerii luminii și naturii ei. În curînd ei vor începe un schimb de scrisori cu privire la problema gravitației. Datorită acestor scrisori, Newton și-a verificat unele dintre concluziile la care ajunsese, ba chiar și-a îndreptat și anumite erori din calculele sale! Mai mult, la întrebarea pusă de Hooke, Newton determină forma traiectoriei unui punct material care se mișcă atras de o forță centrală invers proporțională cu pătratul distanței, și îi comunică rezultatul.

— Hooke a arătat acest rezultat Societății?

— Nu, căci a fost o comunicare personală care a rămas secretă. Însă în același timp această problemă a început să intereseze atît pe Christian Wren, celebrul arhitect londonez, cît și pe Edmund Halley. Și ei porneau de la legile lui Kepler și ar fi vrut să determine, în ipoteza că forța centrală de atracție este invers proporțională cu pătratul distanței, care este curba pe care urmează să o descrie mobilul asupra căruia acționează această forță. Dar nu știau

cum să procedeze! Wren oferi chiar un premiu aceluia dintre cei doi colegi, Hooke sau Halley, care ar rezolva problema. Hooke avea rezultatul, dar nu era al lui, așa că s-a mărginit să afirme că-l cunoaște dar nu-l divulgă, iar Halley, poate bănuind ceva, poate din simplă inspirație, se duce la Cambridge ca să se consulte cu Newton. Aceasta era în 1684. Newton, care stabilise de mult rezultatul, i-l comunică. Halley rămîne atît de surprins și de încîntat de el, încît încearcă toate mijloacele a-l convinge pe Newton să-l publice. În 1685 Newton acceptă. Cei ce au studiat mai adînc această problemă au afirmat că Newton nu a putut-o face mai devreme pentru că pînă atunci nu avusese toate verigile necesare ca să înlănțuiască perfect sistemul expus în Principii. De pildă atunci a reușit să stabilească care este atracția totală a unei sfere omogene asupra unui punct exterior ei, fapta era de o importanță capitală pentru opera sa!

— Cred și eu! E ușor să afirmi că fiecare particulă a sferei atrage punctul exterior cu o forță care variază proporțional cu produsul maselor și invers proporțional cu pătratul distanței. Dar să vedem ce se întîmplă cînd le compui pe toate, și mai întîi cum le compui?

— Exact asta era problema. E adevărat că Newton avea la îndemînă descoperirea sa măiastră: calculul diferențial și cel integral, dar pe atunci el nu le stăpînea cu aceeași forță cu care le mînuiește azi un student începător! Se spune că Newton a gîndit 20 de ani la această problemă, pînă ce a găsit soluția ei, anume: că atracția sferei asupra punctului material este aceeași ca și cum întreaga masă a sferei ar fi concentrată într-un singur punct, care este centrul sferei. De-abia după ce a stabilit acest lucru cu toată rigurozitatea posibilă, Newton a putut considera planetele ca pe niște puncte materiale în care întreaga lor masă era concentrată în centrul lor și a enunțat astfel legea atracției universale. El a arătat cum se calculează masa soarelui sau a planetelor, a pus bazele teoriei perturbațiilor produse în mersul planetelor de atracția exercitată asupra lor, nu numai de soare, ci și de planetele din apropierea lor; a explicat fenomenul mareelor și a supus aceleiași

forțe de atracție chiar și pe capricioasele și misterioasele comete! Cînd a hotărît să-și publice Principiile, nu a ținut seamă că munca pe care o avea de îndeplinit întrecea puterile unui om obișnuit! Timp de un an și jumătate a lucrat aproape încontinuu, zi și noapte. Ațipea cîteva clipe și se scula, pe jumătate îmbrăcat, să continue calculele sau demonstrațiile! Uita să mănînce, iar ceasurile fugeau fără să știe cînd. Mai tîrziu acest exces de zel se va răzbuna zdruncinîndu-i sănătatea și nervii, dar, după o odihnă impusă de ceilalți, el își va reveni. Cartea a avut un răsunet nemaipomenit în Anglia și peste tot. În ea a avut ocazia să expună, e drept că într-un mod destul de succint, noțiunile de calcul diferențial și integral, descoperite de el.

— Spune-mi, nu ți se pare curioasă această comportare? Să știi că ai găsit o minunată metodă matematică, prin care să dezlegi probleme altfel imposibil de dezlegat, și să nu trîmbițezi aceasta de pe acoperișuri?

— Nu! Mai întîi pentru că Newton avea o părere foarte modestă despre descoperirile lui. Cunoști vreun savant care să fi exprimat această părere mai limpede și simplu ca el? „Nu știu în ce fel apar eu oamenilor dar mie însumi îmi pare că nu-s altceva decît un băiețandru, care se joacă la malul mării, bucurîndu-mă cînd găsesc, din cînd în cînd, cîte o pietricică mai lucioasă sau o scoică mai frumoasă decît acelea obișnuite, în timp ce marele ocean al adevărului își poartă valurile înaintea mea, fără ca eu să-l pot cunoaște". Descoperirile lui erau pentru el un prilej de desfătare și nicidecum o cale spre glorie. De aceea, poate, era el și așa de susceptibil la observațiile ce i se ridicau înainte. Ai văzut cum a reacționat la controversa cu privire la problemele de optică? Ar mai putea intra în considerație, cred, și faptul că, deși Newton era un matematician desăvîrșit, el nu considera matematicile ca un scop în sine, ca artă pentru artă, ci ca un instrument impecabil de cercetare a fenomenelor naturii, ca un mijloc dintre cele mai potrivite de a le exprima într-un limbaj precis. Mai mult, el considera că trebuie să se modeleze metoda matematică după condițiile fizice ale problemei de

studiat, în așa fel ca soluția să apară cît mai simplu și intuitiv. De aceea, în demonstrațiile sale matematice, Newton nu folosea, în mod constant, una și aceeași metodă, ci uneori analiza infinitezimală pe care o descoperise el, alteori metoda geometriei analitice pe care o învățase de la Descartes sau a geometriei euclidiene. Pentru el, formularea matematică a unei probleme și calculele ce urmau aveau menirea, pe de o parte, să exprime rezultatele sub o formă cît mai precisă, pe de alta să prevadă, datorită interpretării formulelor, toate aplicațiile practice. Vezi, de aceea cred că nu s-a grăbit să-și trîmbițeze metoda sa matematică de pe acoperiș! Cu totul altfel privea lucrurile Gotfried Wilhelm Leibniz, și el descoperitorul calculului infinitezimal! Născut fiind în 1646, înseamnă că era cu 4 ani mai mic decît Newton. De tînăr e atras și el de studiul filozofiei și al științelor. Citește operele lui Kepler, Galileo, Descartes, Huygens, dar își dă seamă că acestea nu pot fi pătrunse fără a cunoaște temeinic matematicile. Or, în Leipzig, unde studia el, nu exista un al doilea Barrow. Se duce la Jena și studiază, timp de 3 ani, cursurile de matematici de la această Universitate. În 1666, atunci cînd Newton, neștiut de nimeni, plămădea la ferma din Woolsthorpe marile lui descoperiri, Leibniz susținea, la Universitatea din Altdorf, un strălucit doctorat în drept în urma căruia i se oferă, la vîrsta de 20 de ani, catedra de drept de la acea Universitate, afiliată aceleia din Nürenberg. Tot atunci, el a compus o lucrare, *De arte combinatoria*, care se arăta uriașă în eventuala ei dezvoltare ulterioară, căci autorul afirma, nici mai mult nici mai puțin, că poseda elementele pe baza cărora s-ar putea crea: „o metodă generală în care toate adevărurile rațiunii să fie reduse la un fel de calcul. În același timp ar fi un limbaj sau scriere universală, cu totul diferită de acelea propuse pînă acum, căci aici simbolurile și cuvintele ar dirija rațiunea. Iar erorile, exceptînd acelea ale faptelor, ar fi numai erori de calcul".

— Mi se pare că așa ceva este la baza calculului logic sau chiar a mașinilor electronice de calcul, nu?

— Desigur, Leibniz este considerat ca un premergător al acestui calcul cu totul modern, care aparține domeniului matematicilor aplicate. De altfel, tot de atunci, îl preocupa și planul de a construi o mașină de calculat. Deși el nu mînuia matematicile cu aceeași dexteritate ca Newton, iar preocupările sale erau foarte variate și din domenii cu totul deosebite, el avea un cult pentru această știință. În 1672 Leibniz, care intrase în serviciul Electorului de Mayence, a fost trimis cu anumite chestiuni diplomatice la Paris. Aici l-a cunoscut pe Huygens, s-a împrietenit cu el și timp de un an acesta l-a învățat matematicile, așa cum o dorea el. În anul următor trebuie să plece la Londra. Acolo, face cunoștința matematicienilor englezi, asistă la ședințele Societății regale și la una dintre ele prezintă el însuși mașina sa de calculat. Faptul impresionează îndeajuns ca să fie ales membru al Societății regale. Reîntors la Paris, aduce cu sine cartea de logaritmi publicată de Mercator din care învață cum se poate face cvadratura hiperbolei cu ajutorul dezvoltării în serii de puteri a unei funcții. Problema aceasta îl preocupa pe Leibniz de mai înainte. El a stabilit o serie numerică alternantă, care exprima valoarea lui $\frac{\pi}{4}$ prin inversele numerelor impare. La Londra ca și la Paris, Leibniz a avut ocazia să discute și problema tangentelor la o curbă. Ea fusese formulată de Fermat și reluată de Pascal, într-o cărticică pe care o publicase la Paris în 1659: „Tratat despre sinusurile sfertului de cerc" avînd ca titlu: „Scrisori ale lui Amos Dettonville către dl. Carcavy".

— Mi se pare că Amos Dettonville este un pseudonim al lui Pascal?

— Da. De fapt este o anagramă a altui pseudonim al lui, anume: Louis de Montalte. În această lucrare a lui Pascal, Leibniz a găsit în 1673 *triunghiul infinitezimal*, căruia îi spunea „triangulum characteristicum". Ca și odinioară Newton, Leibniz întrevăzu aici miezul calculului diferențial — cuvîntul îi aparține. El a introdus notațiile corespunzătoare inițialei acestui termen: dx, dy, etc. ca să

James Gregory

noteze acele mărimi diferențiale sau infinit de mici. În aceeași cărțulie a găsit și calea către problema inversă tangentei, aceea a *calculului integral*, ce se referă la cvadratura curbei considerate.

— Dar cursul lui Barrow nu i-a căzut în mînă?

— Ba da. Acela și un altul la fel de interesant, al lui James Gregory, au fost temeinic studiate de Leibniz cînd s-a întors din Londra. De o deosebită importanță a fost și cunoștința cu Oldenburg, secretarul perpetuu al Societății regale, cu care a rămas în corespondență. Într-o scrisoare din 1675 trimisă de la Paris, Leibniz îi comunica faptul că a descoperit o metodă analitică, generală, bazată pe seriile infinite, prin care poate face cvadratura curbelor.

— Și Oldenburg ce a făcut?

— I-a răspuns că d-nii Newton și James Gregory cunosc mai de demult această operație! În anul următor, 1676, Leibniz a stat din nou în Londra două săptămîni. Atunci el a cunoscut prin John Collins, consilierul matematic al Societății regale și pasionat de matematicile atunci la modă, un manuscris al lui Newton în legătură cu dezvoltarea funcțiilor în serii de puteri, dar pe Newton personal nu l-a cunoscut. Prin intermediul lui Oldenburg, Leibniz îi scrie lui Newton cerîndu-i lămuriri cu privire la metoda lui de a duce tangenta la o curbă. Newton îi răspunde printr-o scrisoare amabilă și îi dă toate lămuririle cerute. Mai mult, îi mărturisește că posedă și două metode pentru rezolvarea problemei inverse dar că deocamdată nu i le arată decît prin rezultate. Metoda i-o desemnează numai printr-o anagramă, pe care o alătură.

— Știu că în secolul XVII se foloseau adesea atari procedee de a formula o descoperire. În felul acesta se păstra secretul ei și, totodată, se asigura prioritatea descoperirii. Mi-aduc aminte că tot sub formă de anagramă i-a comunicat Huygens lui Wallis că a descoperit inelul lui Saturn!

— Mai ții minte? Trebuie să fie cam multișor de cînd ți-am spus-o!

— Da' ce altă treabă are mintea decît să păzească să nu-i zboare pe-o ureche ce i-a intrat pe cealaltă? Cum s-a simțit Leibniz după această scrisoare?

— Cred că foarte încîntat, fiindcă în Anglia, deși Newton nu publica nimic, reputația lui de savant era făcută de cel puțin 4 ani, de cînd fusese ales membru al Societății regale. Se poate constata după scrisoarea de răspuns, din 1677, în care Leibniz îi arăta procedeul său de a duce tangenta la curbă, notațiile folosite de el și totodată îi dezvăluia pe față, fără nici un fel de ascunzișuri, metoda inversă aceleia de găsire a tangentei, numită de el atunci *calculul sumatorius*, iar mai tîrziu *integral*. Timp de 7 ani, de aici înainte, Leibniz nu va publica nimic din aceste descoperiri deși, după cum ai văzut, firea lui deschisă, veșnic agitată și entuziastă, trebuie să fi acceptat cu greu această tăcere.

— Aici, dă-mi voie să te contrazic! Se întîmplă să cunosc mai îndeaproape viața lui Leibniz și să găsesc explicația pe care nu o vezi tu. Leibniz a schimbat în acest timp stăpînul! Electorul a murit și după cîțiva ani el intra ca bibliotecar în serviciul ducelui de Brunswick. În această nouă calitate el era hărțuit fără cruțare. Considerîndu-l arhivarul familiei, în sensul de genealogist, ducele avea pretenția să i se descopere toate neamurile înrudite cu casele domnitoare, ca să-și poată formula astfel drepturile sale de revendicare la diferitele tronuri din Europa. În acest scop Leibniz avea de răsfoit aproape toate bibliotecile și arhivele din Germania, Austria și Italia. Pe urmă, nu uita că el era și filozof. În acest timp a mai compus și tratatele lui de filozofie. Ai să-mi răspunzi că mintea lui lucra tot timpul și că cele mai multe dintre lucrările lui erau scrise prin diligențe și hanuri, în timp ce trecea de la o localitate la alta! E adevărat, de aceea au și rămas atîtea manuscrise de la el că nici azi nu-s toate descifrate, dar asta-i altceva. Fiind așa de prins în această direcție, avînd pe deasupra și atribuția de sfătuitor al familiei ducelui, în toate fleacurile ce se iveau, nici nu știi cînd au trecut cei 7 ani!

— Da, nu te contrazic, e foarte probabil să fi fost așa. De altfel, în acest timp nici Newton, care era cu totul liber și stăpîn pe timpul lui, nu s-a silit să publice nimic. Și acum, iată-ne în anul 1684. De doi ani Leibniz era și redactorul revistei științifice *Acta Eruditorum*, înființată la stăruința lui. Aici a publicat el, în 1684, primul memoriu: „Nova methodus pro maximis...", dînd astfel la iveală bazele Calculului diferențial — după cum ți-am mai spus, terminologia este a lui. Peste doi ani, în 1686, apare a doua lucrare: „Analysis infinitorum", căruia îi spune *Calculul sumatoriu* sau *methodus tangentium inversa*. Cu această ocazie el arăta că: „D. Newton a ajuns la descoperirea cvadraturilor cu ajutorul seriilor infinite, nu numai cu totul independent de mine, dar el a dat metodei sale o completare de așa natură că publicarea lucrărilor sale

nerealizată pînă acum ar însemna un imbold pentru noi și mari succese în știință".

— Și cum a reacționat Newton cînd a văzut aceste articole? Și Londra?

— În nici un fel. Deocamdată peste tot era liniște și pace. Numai în Elveția, la Bâle, articolele lui Leibniz au zguduit pe neașteptate mintea unui viitor întemeietor al unei dinastii de matematicieni...

— Te gîndești la familia Bernoulli? Cu 8 matematicieni, aproape toți celebri în numai trei generații, iar de atunci și pînă azi, cu vreo 120 de matematicieni? În adevăr, un exemplu de ereditate!

— În privința asta, nu-mi vine să las să treacă ocazia fără să-ți povestesc gluma sau adevărul care circulă despre unul dintre feciorii lui Ioan (nr.1) Bernoulli, anume Daniel Bernoulli, care a fost numit, la 25 de ani, profesor de matematici la Petersburg. Asta s-a întîmplat în veacul al XVIII-lea, cînd călătoriile se mai făceau cu diligența. Într-o asemenea călătorie din tinerețe i se întîmplă să aibă ca vecin un matematician, cu care a discutat o mulțime de lucruri interesante. La sfîrșitul călătoriei, oamenii s-au considerat prieteni. Aceasta l-a făcut pe Daniel, ca fiind cel mai tînăr, să i se prezinte celuilalt: „Mă numesc Daniel Bernoulli". — „Atunci eu sînt Isaac Newton", a răspuns celălalt, batjocoritor și supărat că acest tînăr îndrăznește să-și împrumute un asemenea nume de faimă în loc să-l spună cu modestie pe al său. Drept comentariu, Temple Bell, căci acolo am citit această întîmplare, menționează că Daniel Bernoulli a considerat acest incident ca cel mai sincer omagiu de admirație care i s-a adus vreodată. Și acum să ne întoarcem la povestea noastră. Jacob, întîiul Bernoulli, nu era chiar așa de tînăr, avea pe atunci vreo 30 de ani. Era feciorul unui negustor foarte bogat din Bâle și avea o aprigă pasiune pentru matematici. Cunoștea cursul lui Barrow și tot ce se scrisese pînă atunci. Imediat ce a citit memoriile lui Leibniz, mintea lui a început să lucreze cu febrilitate și să ducă mai departe cele citite. În același timp îl inițiază și pe fratele lui, Ioan

Daniel Bernoulli

întîiul, mai mic cu 3 ani decît el. Amîndoi au găsit în acest calcul o cale miraculoasă de rezolvare pentru multe probleme din geometria analitică, calculul variațiilor și acela al probabilității care nu-și aflau pînă atunci dezlegarea și au început o corespondență foarte susținută cu Leibniz. Mai mult, din 1687, Jacob Bernoulli devine profesor de matematici la Universitatea din Bâle și, din acel an, el preda studenților Calculul diferențial și integral — termenul de *integral* care l-a înlocuit pe *sumatoriu* a fost adoptat de Leibniz chiar la sugestia lui Bernoulli. În cursul său, I. Bernoulli a folosit notațiile lui Leibniz, recunoscut drept autorul acestei metode noi de calcul. Ioan Bernoulli era o fire mai arțăgoasă și egoistă. El nu a putut sta prea mult alături de fratele său, din cauza certurilor ce izbucneau între ei cu privire la paternitatea descoperirilor lor matematice. Din 1690 a plecat la Paris.

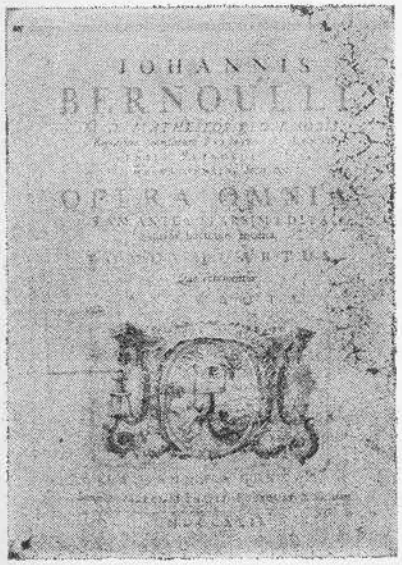
Ioan Bernoulli

— Așa de ambițios era?

— Nu așa, ci și mai și! Află că, fiind la Paris, și-a alungat propriul lui fiu de acasă și nu a mai vrut să știe de el pentru că a concurat, alături de dînsul, la un premiu al Academiei franceze pentru matematici și l-a cîștigat! Pentru Ioan I Bernoulli matematica era o patimă, așa cum au alții patima jocului sau a vinului. În scrisorile dintre cei doi frați sînt amestecate, alături de descoperiri matematice de o rară subtilitate, cele mai grosolane înjurături și acuzații de furturi de idei!

— După cîte înțeleg, Calculul infinitezimal își datorește o parte din răspîndirea lui tocmai învrăjbirii dintre acești doi frați pătimași!

— Nu numai răspîndirea, ci și dezvoltarea Calculului diferențial și integral au fost opera celor doi frați. Mai întîi Jacob I Bernoulli publică o serie de articole în Acta Eruditorum care au darul să tălmăcească multe probleme în noul limbaj și să arate cît de simplă apare astfel soluția lor. Din 1694 la Acta Eruditorum colaborează și Jean I Bernoulli, care pînă atunci dăduse lecții despre metoda lui Leibniz la Paris. El a compus chiar un curs de calcul diferențial. Manuscrisul considerat pierdut a fost regăsit în 1920 și publicat la Basel în 1923. Printre elevii lui Jean I de la Paris se afla și marchizul G.F. de l'Hôpital, el însuși un destoinic matematician. Așa se face că în 1696 a apărut la Paris primul curs tipărit despre asemenea probleme, intitulat: „Analiza infiniților mici pentru înțelegerea liniilor curbe", prin care se face cunoscută opera lui Leibniz cu notațiile folosite de el. Cartea e scrisă într-un stil simplu și clar, spre deosebire de articolele de odinioară ale lui



Pagină de titlu din cartea lui Ioan Bernoulli

Leibniz, care, prin laconismul și greșelile lor de tipar, erau aproape inaccesibile celor mai mulți dintre matematicieni. L'Hôpital expune aproape toate problemele care se rezolvă ușor și elegant prin această nouă metodă, în plus, arată cum se poate stabili adevărata valoare a unei expresii nedeterminate, care apare de pildă sub forma: $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; 0∞; etc.

— Știu și eu, e vorba de regula lui L'Hôpital!

— Exact, numai că, de fapt, regula nu a fost găsită de marchizul de l'Hôpital, ci de Ioan I Bernoulli, dar dl. marchiz a uitat să menționeze în tratatul pe care l-a compus și numele învățătorului căruia îi datora întreaga inițiere!

— Tocmai lui Ioan I Bernoulli să i se întîmple aceasta? Spui că el a încercat să fure ideile lui Jacob?

— De! ar fi cam „după faptă și răsplată", numai că Bernoulli nu a vrut să știe nimic despre acest proverb și a cerut satisfacție, care nu prea i-a fost dată, fiindcă și l'Hôpital era un mare matematician. Multe dintre rezultatele expuse în carte erau descoperite de el, iar acelea luate de la Ioan I Bernoulli erau prelucrate într-un mod personal. Îmi pare rău că nu-ți pot înfățișa, cu lux de amănunte, toată activitatea matematică, plină de febrilitate, dezlănțuită atunci pe continent, datorită impulsului dat mai ales de cei doi frați Bernoulli. Cînd în 1687 se tipărește cartea lui Newton, aceasta a făcut senzație prin noutatea concepțiilor lui cu privire la mecanica cerească, la dinamică în general, dar nu în ceea ce privește calculul diferențial care, la acea dată, era în oarecare măsură bine cunoscut. Că Newton nu era deloc supărat de acest fapt și că nici măcar prin gînd nu i-a trecut să se certe cu Leibniz pentru prioritate, o poți constata chiar acum. Deschide, te rog, Principiile la pg. 206, la Lema II.

— Văd: „Momentul unei „genita" este egal cu momentele diverselor..."

— Ai înțeles cred că este o teoremă de calcul diferențial? Nu asta îi important, ci Scolia care urmează după această teoremă la pg. 208.

— Vrei să o citești?

— Încă nu, fiindcă aceasta de aici nu-i cea originală, apărută în prima ediție a Principiilor, ci o alta, ce nu se găsește în ediția a III, din 1726. Să ne ducem deci la Adnotările lui Victor Marian. Vezi ce scrie traducătorul, la pg. 465, despre Scolia de la pg. 208.

— Atunci o citesc: „Spre deosebire de textul ediției a III-a, în ediția I și a II-a, textul acestei Scolii este următorul: „În schimbul de scrisori care a avut loc între mine și excelentul geometru G.W. Leibniz, înainte cu 10 ani, cînd i-am făcut cunoscut că am aflat o metodă de determinare a maximelor și minimelor, de a trasa tangente și altele asemenea, aplicîndu-le atît la mărimile raționale cît și la cele irațională, și cînd i-am ascuns aceasta într-o anagramă ce cuprindea următoarea propoziție: (Fiind dată o ecuație oarecare conținînd cantități fluente, să aflăm fluxiunile și invers) acest bărbat distins mi-a răspuns că și el a aflat o metodă de același gen și mi-a comunicat metoda sa, care abia se deosebește de a mea în formularea cuvintelor și a simbolurilor. Baza ambelor se cuprinde în lema precedentă".

— Și acum, înainte de a vedea ce scria Newton peste 39 de ani, adică în 1726, aș vrea să-ți spun că într-o scrisoare din 1693 adresată lui Leibniz, deci înainte de a fi apărut altă lucrare de a lui Newton, — *Optica* — în care adăuga și două anexe, una despre enumerarea curbelor de ordinul al treilea și cealaltă despre cvadratura curbelor, acesta îi explică de ce a apărut problema cvadraturii în Operele lui Wallis, tipărite în acel an. Iată o parte din această scrisoare a lui Newton adresată lui Leibniz: „Wallis al nostru îmi cere să expun acea metodă pe care am ascuns-o în vremea aceea de d-ta prin intervertirea literelor. Am făcut pe scurt ce am putut face. Sper că n-am scris nimic care să-ți facă neplăcere, iar dacă s-a întîmplat așa ceva, te rog să-mi comunici, pentru că prietenii îmi sînt mai scumpi decît descoperirile matematice".

— Imi place mult această scrisoare, după cum am găsit foarte frumoasă și Scolia ce am citit-o mai înainte. Îți spun drept că m-ai pus în mare încurcătură, căci după asemenea mărturisiri nu văd cum poate începe învrăjbirea?

— În privința aceasta s-a scris foarte mult și foarte multe. Dar dintre toate, mie mi se pare că cel mai bine a înțeles situația și a pus punctul pe i Pierre Brunet într-un articol consacrat lui Newton în cartea lui F. le Lionnais, intitulată: „Marile curente ale gîndirii matematice", apărută la Paris în 1948. Am să-ți citez din memorie pasajul cu pricina: „E probabil că cu tot răsunetul „Principiilor", în cercul științific al Europei întregi, Newton și-ar fi sfîrșit în tihnă viața la Cambridge, dacă, dintr-o dată, soarta lui nu s-ar fi schimbat brusc, prin venirea la putere a viitorului lord Halifax, ca ministru de finanțe. Acesta, fost elev al Universității din Cambridge, rămăsese prietenul profesorului de la Trinity College. Prin influența acestui personaj oficial, Newton a fost numit în 1695 Controlor al Monetăriei statului și apoi, în 1699, director al Monetăriei. Deși și-a păstrat catedra din Cambridge pînă în 1703, cînd a fost ales Secretarul perpetuu al Societății regale din Londra, el a încetat să mai țină cursuri, îndată după ce s-a mutat la Londra. Faimoasa contestație a prioritățiiunuia sau a celuilalt, cu privire la descoperirea Calculului infinitezimal, dintre Newton și Leibniz, sau mai bine zis dintre discipolii acestor doi savanți, a început puțin timp după sosirea lui la Londra".

— Ar putea în adevăr să fie o explicație plauzibilă, deoarece, odată ajuns în Londra, Newton devine o personalitate mai mult decît științifică, una națională!

— Ai sesizat bine lucrurile, căci iată ce-i scria și „Wallis al nostru" în anul 1695, îndată după ce părăsește Cambridge-ul: „D-voastră nu aveți destulă grijă pentru onoarea d-voastră și a națiunii, reținînd atît de multă vreme prețioasele d-voastră descoperiri". Că Newton nu reacționează la acest atac direct se poate constata din faptul că vor mai trece 9 ani pînă ce își va publica metoda sa, în cea de a doua anexă a **Opticii**, apărută

în 1704. Între timp însă, conflictul izbucnise. L-a provocat matematicianul elvețian Fatio de Duillier, care locuia la Londra și era un bun prieten al matematicienilor englezi, într-o carte în care cercetează proprietățile *brahistocronei*.

— Ce fel de curbă este brahistocrona? După numirea ei, aș spune că este curba parcursă de un mobil *în timpul cel mai scurt?*

— Așa-i, numai că ar trebui să precizezi că e vorba de un drum cu extremitățile fixate dinainte și că mișcarea se face fără frecare. Curba asta are și un cîntec.

— Atunci cîntă-l.

— Cu trei ani mai înainte, adică în 1696, Leibniz împreună cu frații Bernoulli au lansat problema brahistocronei, ca o sfidare matematicienilor ce nu cunoșteau calculul diferențial, în forma următoare: „Care este curba pe care va trebui să o descrie un punct material, fără frecare, sub influența forței de gravitație, așa fel încît pornind de la un punct A să ajungă în punctul B situat mai jos decît A, în timpul cel mai scurt?" Trecînd 6 luni fără să primească vreun răspuns, problema a fost pusă din nou. Așa s-a făcut că Newton a auzit de această problemă de la un prieten, pe cînd se întorcea acasă de la Monetărie. În după amiaza aceea a și rezolvat-o și a doua zi a comunicat soluția Societății regale, fără să-și dezvăluie numele. Cînd a văzut soluția, Ioan I Bernoulli a recunoscut imediat autorul, exclamînd „Cunosc leul după gheare". Butada i-a plăcut mult lui Leibniz. Nu bănuia atunci că, în curînd, va simți acele gheare înfipte în inima sa, de unde nu se vor mai desprinde! Ei, și acum să ne întoarcem la „d-l. Fatio". Brahistocrona i-a folosit numai ca motiv, pentru a discuta asupra priorității, în legătură cu descoperirea calculului diferențial. Atribuind-o lui Newton, el strecoară învinuirea că Leibniz ar fi plagiat. Leibniz se simte grozav de ofensat și se apără publicînd un articol în Acta Eruditorum din 1700, arătînd că însuși Newton recunoștea independența descoperirii sale în Scolia care se găsește în Principiile din 1687.

— Și Newton?

— Newton a tăcut chitic, ca și cum nici n-ar fi știut ceva despre această acuzație!

— Și dacă, cu adevărat, nu știa? Era un om așa de absent de lumea din afara lui, că n-ar fi de mirare! Nu mi-ai spus că dacă avea prieteni la masă și mergea în pivniță după vin, rămînea acolo, adîncit în cine știe ce problemă, pînă ce veneau prietenii să-l caute și să-i amintească că-l așteaptă? El singur nu urmărea revistele — și în cazul brahistocronei a fost la fel — iar de data aceasta, nimeni nu avea nici un interes să atragă atenția lui Newton nici asupra articolului scris de Leibniz și nici asupra cărții lui Fatio!

— Ar putea să fie și așa. Cel puțin acum la început. Oricum, Leibniz avea motive să fie amărît peste măsură și găsește cu cale să se răzbune, cînd se ivește ocazia. Răzbunare subtilă de filozof, dar extrem de ațîțătoare pentru partea adversă. Iat-o: Cînd a apărut Optica, în 1704, în Acta Eruditorum apare o recenzie, nesemnată ce-i drept, în care i se aduc elogii lui Newton, însă toate referințele în legătură cu calculul infinitezimal au fost transcrise în notația lui Leibniz și nu în aceea originală a lui Newton. Desigur că englezii au privit această faptă ca pe o insultă și au căutat să se achite cît mai din plin. Așa că, în Philosophical Transactions din 1710, un alt elev al lui Newton, John Keil, și el membru al Societății regale, publicînd un articol despre forțele centrale, scrie: „Toate acestea decurg din metoda fluxiunilor, atît de celebră astăzi, care a fost inventată pentru prima oară, fără îndoială, de Sir Isaac Newton, lucru despre care se poate convinge cu ușurință oricine ar citi scrisorile sale, publicate de Wallis. Același calcul a fost dat publicității mai tîrziu de Leibniz în Acta Eruditorum, în care el a modificat numai denumirea, forma și modul de a însemna".

— De data aceasta, chestiunea e în adevăr gravă, căci acuzarea de plagiare este cît se poate de evidentă. Ce face Leibniz? E doar și el membru al Societății regale din Londra!

— Mai grav este că Newton prezida această Societate din 1703, în calitate de Secretarul ei perpetuu, așa că acum nu mai poate fi invocată scuza că el nu ar cunoaștea lucrurile. Leibniz se plînge Societății regale cerînd să i se facă dreptate prin rectificarea celor scrise de Keil. Cererea a fost repartizată unei comisii care a publicat în 1712 raportul său, „din care se constată că există o identitate între ambele metode, dar descoperirea lui Newton este anterioară". Problema cea mai importantă, aceea a modului de exprimare diferit, al eficacității și avantajului uneia sau al alteia dintre cele două notații, nu este deloc atinsă, iar Keil nu este găsit vinovat, „fiindcă Newton este primul inventator al Analizei". Anul următor a fost publicat și un „Commercium epistolicum" unde se dau extrase din majoritatea scrisorilor schimbate între diferiții savanți, mai cu seamă englezi, cu privire la fundarea Analizei. Și din această carte se desprinde impresia că Leibniz a împrumutat ceea ce era esențial de la Newton.

Leibniz n-a avut cunoștință nici de formarea comisiei, nici de cercetările pe care le-a făcut ea, așa că nu a putut trimite vreun raport prin care să se apere, iar atunci cînd a primit „Commercium epistolicum", spiritele din întreaga Europă erau atîtate la culme, iar oamenii de știință erau împărțiți în două tabere: unii țineau cu Newton, alții cu Leibniz. Numai că de partea lui Newton erau îngrămădite prea multe bunuri ca balanța să se mai poată echilibra: mai întîi și întîi erau *Principiile matematice ale filozofiei naturale*, care nu putea fi echivalată de nici o lucrare publicată de Leibniz pînă atunci sau de atunci și pînă în 1713 cînd apare a doua ediție a lor! Apoi era *prestigiul* lui Newton: Președintele pe viață al Societății regale din Londra, societate echivalentă unei Academii, în fine fusese înnobilat din 1705, de către regina Ana a Angliei, fusese atîția ani profesor la vestita Universitate din Cambridge, Ludovic al XIV-lea îi oferise o pensie de onoare pe care el o refuzase, însuși marchizul de l'Hôpital, care a cunoscut calculul infinitezimal al lui Leibniz, scria că: „nu-și poate închipui că autorul Principiilor mănîncă, bea și doarme

ca ceilalți oameni", și multe, multe altele. Iar de partea lui Leibniz, ce? Nici nobil, nici profesor! Un biet bibliotecar, în slujba unui duce, alergînd prin toate capitalele ca să stabilească o genealogie fără nici un interes pentru progresul omenirii sau al culturii. O minte limpede și sclipitoare, ca un diamant, pe care n-a avut norocul să o poată folosi, așa cum o dorea el. „Am multe idei care mai tîrziu ar putea fi de folos dacă alții, mai pătrunzători decît mine, le-ar cerceta și ar lega frumusețea spiritului lor de munca mea", scria el îndurerat. Cine să-i ia apărarea? Însuși stăpînul lui, Electorul Georges Louis, plecat la Londra în 1714 în legătură cu probleme politice, îi ordonă să rămînă în biblioteca din Hanovra, ca să continue studiul asupra familiei Brunswick! Foarte probabil că se simțea tare jenat că are în slujba sa un asemenea impostor, care se ocupă de matematici și filozofie în timp ce el este plătit să precizeze care prințesă s-a căsătorit cu care prinț și cîți copii au avut! Singur Ioan Bernoulli l-a apărat pe Leibniz, dar pătimaș cum era, apărarea lui s-a transformat în injurii aduse lui Newton, injurii și insulte pe care el va fi nevoit să le retragă. Satisfăcut, Newton îi scrie lui Bernoulli: „N-am căutat niciodată să cîștig un renume în străinătate, dar doresc să-mi păstrez reputația de om cinstit... n-am căutat niciodată să-mi impun părerile în lume și m-am îngrijit, mai ales, să nu mă las antrenat în discuții din cauza lor".

— Mă îndoiesc de sinceritatea celor scrise!

— Totuși e așa! E ca și prima scrisoare pe care o scria Newton lui Oldenburg, în tinerețe, refuzul lui de a mai publica... cred că a avut mare dreptate Pierre Brunet: dacă nu intervenea Lordul Halifax să-l aducă pe Newton la Londra, cu tot succesul Principiilor, el rămînea profesor la Cambridge și toată această învolburare nu ar fi existat... Cred că Newton a fost dus de vîrtej, nu mai putea să i se opună... În 1716 Leibniz mai face o încercare: scrie lui A.S. Conti care era atunci la Londra, arătîndu-i că cea mai bună dovadă a nevinovăției lui era însăși Scolia din Principiile lui Newton. Aceasta este însă era ultima, fiindcă, în

același an, Leibniz moare. Conflictul nu se încheie aici. În cartea lui *J. Raphson*: *Istoria fluxiunilor*, apărută tot atunci, autorul scrie: „Dacă Leibniz a împrumutat metoda sau a inventat-o singur, nu are importanță absolută, căci al doilea inventator nu are drepturi", iar Newton, după moartea lui Leibniz, admite să se schimbe conținutul Scoliei cu pricina. Să ne întoarcem acum la pagina 208 a Principiilor, ca să o citești în noua sa formă:

— „Într-o scrisoare din 10 decembrie 1672 către compatriotul nostru dl. J. Collin, descriind o metodă a tangentelor pe care o socoteam identică cu metoda lui Slusius, pe atunci însă nepublicată, am adăugat: «Aceasta este un caz particular, sau mai bine zis un corolar al unei metode generale, care se extinde fără nici o greutate de calcul, nu numai asupra ducerii tangentelor la curbe oarecari, fie geometrice, fie mecanice, fie privind într-un mod oarecare linii drepte sau alte curbe, ci și la rezolvarea altor genuri mai complicate de probleme asupra curburilor, ariilor, lungimilor, centrelor de greutate ale curbelor etc. nici nu se mărginește (ca metoda lui Hudden asupra maximelor și minimelor) numai la acele ecuații care sînt libere de cantități iraționale. Această metodă am întrețesut-o cu cealaltă în care institui explicarea ecuațiilor reducîndu-le la serii infinite.» Pînă aici scrisoarea. Și aceste cuvinte din urmă se referă la tratatul pe care l-am scris în 1671 asupra acestor lucruri. Temeiul acestei metode generale este cuprins în lema precedentă". Am terminat de citit Scolia și nu-mi vine să cred că am citit ceea ce am citit! Newton a admis să se facă această modificare la 10 ani după moartea lui Leibniz? Newton? Ce minunat e monumentul din Westminster Abbey! În luna mai a anului 1968 am stat o dimineață întreagă, cutremurat de emoție, privindu-i mormîntul și recitînd în gînd, cînd versurile lui Voltaire:

„Le compas de Newton, mesurant l'univers
Lève enfin le grand voile et les cieux sont ouverts"[1].

[1] „Compasul lui Newton, măsurînd universul
A ridicat vălul și cerul s-a deschis."

cînd acelea ale lui Pope:

„Natura și legile naturii se ascundeau în noapte.
«Să fie Newton» a spus Dumnezeu, și totul s-a luminat!"

Știu bine că dacă aș mai merge odată la Londra, aș alerga cu aceeași emoție și admirație să-i privesc dala pe care e scris numele lui, lîngă cea de alături cu numele lui Darwin și să recit în neștire aceleași versuri, pe care le țin minte din tinerețe! Cred că pe oameni de mărimea lui Newton nu-i putem judeca cu unitățile noastre de măsură.

— Ca să se ajungă la această concluzie au trecut încă 120 de ani! De-abia în 1846, cunoscutul matematician englez Augustus de Morgan publica, în Philosophical Magazine, un articol în care se analizează cearta dintre Keil și Leibniz în legătură cu calculul fluxiunilor și se recunoaște că judecata de odinioară a fost părtinitoare, iar Leibniz a fost repus în drepturile sale, alături de Newton. Pentru matematicienii englezi, acest articol a adus o mare destindere. Cearta aceasta provocase izolarea matematicienilor englezi de majoritatea matematicienilor de pe continent, care foloseau notația leibniziană, mai comodă și mai intuitivă decît cea newtoniană. De altfel, cercetările de istorie a matematicilor, dezvoltate treptat, începînd după publicarea celor două volume de Istorie a matematicilor ale lui E. Montucla, în 1758, și mai ales după apariția, în 1868, a primei reviste de istorie a matematicilor datorită lui B. Boncompagni: Bulletine di Bibliografia e Storia, au stabilit că această amară învrăjbire nu avea de fapt nici un temei.

— Bine, dar atunci cum stăm cu proverbul: „Pînă nu faci foc, fum nu iese"?

— Focul a fost făcut, și încă cu niște vreascuri ude, de-a mai mare dragul, dar tocmai asta-ți spuneam, că istoria matematicilor a stabilit, în ultima vreme, că el a fost aținat fără nici un rost. Două argumente puternice îl condamnă, și am să încep cu al doilea fiindcă acesta a provocat discuția noastră.

— L-ai găsit în cartea lui Bell, spuneai, nu-i așa?

— Da, în articolul său despre Fermat.

— Despre Fermat? Nu despre Newton sau Leibniz?

— Nu. Ai uitat proverbul: „Cînd doi se ceartă, al treilea cîştigă"?

— Nu, mi l-ai spus doar de la început, dar nu ştiam că Fermat e cîştigătorul! Ce dovadă ai găsit, în această carte, de te-a tulburat atît?

— Uite-o. În biografia pe care o scrie L.T. More despre Newton, în 1934, se află o scrisoare de a lui Newton, necunoscută pînă atunci, în care el arată că *ideea metodei calculului fluxiunilor i-a fost sugerată de metoda de ducere a tangentelor a lui Fermat!* Fermat a fost unul dintre matematicienii cei mai geniali, dacă nu chiar cel mai, alături de Newton, din veacul al XVII-lea. Aşadar iată sursa: *Fermat*. Fermat a fost în corespondenţă şi cu Pascal şi i-a comunicat şi lui metoda sa de ducere a tangentelor. Acesta o face cunoscută în cartea despre care ţi-am amintit, publicată la Paris în 1659, care i-a servit şi lui Leibniz drept izvor de inspiraţie pentru calculul diferenţial!

— Aşadar, e deplin lămurit că lui Fermat îi revine gloria de a fi considerat drept părintele Analizei infinitezimale?

— N-aş putea afirma nici asta, sprijinindu-mă pe proverbul care spune că: „Nimic nu-i nou sub soare".

— Adică şi Fermat, la rîndul lui...

— Foarte adevărat! Începuturile calculului infinitezimal coboară pînă în secolul al treilea înaintea erei noastre, pînă la Arhimede. El este acela care a formulat şi a realizat primele cvadraturi, adică ariile unor suprafeţe plane mărginite de curbe, el a calculat primele volume mărginite de suprafeţe curbe şi tot el a arătat cum se construieşte tangenta la o curbă plană, alta decît cercul!

— Ai dreptate, îmi aduc aminte! El a construit tangenta la spirala lui.

— Ei vezi! Or, Fermat, ca aproape toţi matematicienii de atunci, a fost un admirator al matematicilor greceşti, pe care însă nu le-a imitat, ci le-a depăşit.

— În teoria numerelor!

— Nu putem sări acum la această problemă, mă refer numai la domeniul geometriei. În acest domeniu, putem spune că primii paşi înspre metoda infinitezimală au fost făcuţi de Arhimede. Şi chiar dacă matematicienii de mai tîrziu — îi înţeleg pe cei din Renaştere şi de după — s-au mulţumit să-l imite cu fidelitate, şi n-au făcut nici un pas înainte, modelul cuprindea îndemnul, sub formă potenţială. Se poate constata din lucrările apărute la începutul veacului al XVII-lea, ca aceea a lui Valerio: „Despre centrul de greutate al corpurilor" sau din monumentala lucrare a lui Gregorius a St. Vincentio: „Opus geometricum" din 1628, care introduce şi termenul aşa de mult folosit, după aceea: „metoda exhaustivă".

— Adică „metoda de epuizare", căci *exhaurire* înseamnă *a epuiza*.

— Da, fiindcă urmînd ideea lui Arhimede, el stabileşte ariile figurilor sau volumele închise de suprafeţe, căutînd să le epuizeze prin paralelogramele, respectiv paralelipipedele, ce se puteau înscrie în aceste figuri. Lucrările care urmează poartă amprente noi: *Andreas Tacquet* în *Elemente de geometrie* şi *John Wallis* în *Aritmetica infiniţilor* introduc noţiunea de trecere la limită, primul pe cale geometrică, celălalt pe cale analitică. Asta în ceea ce priveşte calculul integral. Calculul diferenţial, tot de la Arhimede şi Apollonius porneşte. Din 1629 Fermat inventează metoda sa de maxim şi minim şi de ducere a tangentei şi o face cunoscută întîi lui *Roberval*, în 1636, şi peste doi ani lui Descartes. Iată, ţi-am amintit, aşa la întîmplare numai cîteva nume care au netezit calea lui Newton şi Leibniz, uşurîndu-le descoperirea calculului infinitezimal, dar nu pot fi uitate nici altele ca acelea ale lui Kepler, Guldin, Cavalieri, Torricelli, Laloubére, Huygens, James Gregory sau Barrow, despre care ţi-am mai vorbit.

— Mult zgomot pentru nimic, ar fi spus Shakespeare.

— De ce pentru nimic? Dacă nu are nici un rost să se pună chestiunea priorităţii, se pune aceea a meritelor! Fermat şi Descartes, Newton şi Leibniz rămîn făuritorii

metodei moderne cu care știința matematică își continuă cercetările începînd din veacul al XVII-lea înainte, în Europa occidentală întîi și apoi pe tot globul. Căci calculul infinitezimal a însemnat pentru veacurile XVII, XVIII, XIX și începutul veacului XX un instrument de investigație cu totul deosebit de acela al antichității, deși, după cum ți-am amintit, el își are rădăcinile acolo. Acești mari savanți și oameni de geniu au știut să găsească valori noi în noțiunile vechi, ei au introdus formulele matematice și au folosit calculul literar ca să exprime prin el, în mod simbolic și fără cuvinte, legi ale naturii, proprietățile lor matematice, sau ale fenomenelor, ale figurilor și ale corpurilor din natură! Ei au introdus noțiunea de dependență funcțională între două sau mai multe mărimi variabile, au introdus calculul sistematic cu mărimile infinit mici, au cercetat problema mărimilor infinit mari, a dezvoltării funcțiilor în serii și au știut să desprindă și să calculeze în formă intuitivă, prin derivată, diferențială sau integrală, multe mărimi fizice sau geometrice ca viteză, accelerație, tangentă sau curbură a unei curbe, centrul de greutate, masa, volumul și așa mai departe.

— Dar de ce te-ai oprit la începutul secolului XX? Acum nu-i tot așa?

— Acum începe ceva nou, un capitol mai abstract, de structură matematică, despre care vor vorbi cîndva, mai tîrziu, alți prieteni ca noi doi.

PROBLEMA ARMONIEI FORMELOR GEOMETRICE

sau

Despre poliedrele regulate și semiregulate

— Drept să-ți spun vremea asta mă sîcîie, i-am zis prietenului meu Teodor Solonar, îndată după ce ne-am dat binețele de dimineață. Cînd s-a mai pomenit ploaie în 18 ianuarie? Cum să mergem la Repedea? Dedesubt gheața nu-i topită, deasupra toarnă cu găleata... și dacă n-ar fi duminică. Să mergem cu autobuzul pînă la Motel fără să facem un pic de plimbare n-are nici un chichirez! Ce ne facem acum?

— De asta te plîngi? a rîs prietenul meu. De cîte ori mă aflu într-o asemenea situație, mi-aduc aminte că Rainer Maria Rilke spunea cam așa: dacă viața ta de toate zilele ți se pare săracă, tu singur porți vina fiindcă nu ești destul de poet ca să-i smulgi bogăția!

— Cred și eu că lui Rilke i-a venit ușor să formuleze o sentință ca asta, după ce-a stat atîta vreme în preajma lui Rodin, desfătîndu-și ochii cu formele armonioase create de marele sculptor... forme pe care modesta mea locuință nu-și poate permite să le adăpostească!

— Teribil! Aproape că m-ai fi convins dacă nu mi-ar fi zîmbit șugubăț, chiar de aici, de pe masa ta de lucru, comoara ce ascunde nici mai mult nici mai puțin decît a cincea parte din armonia universală!

— Greu să-ți dezleg șarada, fiindcă pe masa mea, în afară de acest cub de sare, cu fețele oleacă zbîrcite de vreme, nu văd nimic care să-ți fi atras atenția!

— Dar tocmai la el mă refer! Nu-ți spune nimic?

— Ba da! E o amintire pe care o am de la părinții mei. În 1926 s-au dus și ei la Slănic-Moldova și, vizitînd Salinele din Tg. Ocna, l-au cumpărat de acolo. Îl păstrez nu de frumusețe, ci fiindcă-mi ține de urît atunci cînd gîndurile lunecă spre trecut. Dar de la armonia mea interioară, pe care admit că mi-o transmit uneori amintirile, și pînă la o cincime din cea universală, oricît de încrezut ți-aș apărea, mai va!

— Nu m-am gîndit deloc la amintirile tale personale, legate de cristalul acesta de sare, ci la armonia ce se degajă din forma lui; însă mi se pare că degeaba bat eu șaua să priceapă iapa! Ar fi mai bine să o iau de-a dreptul.

— Ia stai! În clipa asta mi-a fulgerat ceva prin minte: cub... o cincime... nu cumva băteai în corpurile platonice?

— Da, mă gîndeam la cele 5 poliedre regulate, dar nu-s de acord cu numirea folosită de tine.

— De ce? Oare nu-i Platon acela care a scris pentru prima oară despre ele în acel vestit dialog „Timaeus"?

— Desigur, așa-i. Platon a fost puternic impresionat de faptul că elevul lui preferat, Teetet, matematician plin de talent, care a studiat îndeaproape lucrările lui Timeus din Locra, i-a arătat cum se construiesc poliedrele regulate și, pe deasupra, că în spațiu nu pot exista mai mult decît cinci corpuri de acest fel. De aceea a și scris despre aceste lucruri care au surprins așa de mult pe grecii de atunci și de mai tîrziu, căci ei nu puteau crede că ar putea exista o atare deosebire între geometria plană și cea din spațiu...

— Drept să-ți spun că și pe mine mă surprinde această afirmație! Știu că în plan este posibil să construiești un număr nelimitat de poligoane regulate; de exemplu, pornind de la un poligon regulat oarecare, poți să-i dublezi numărul laturilor, oricît pofte ti; de ce, atunci, în spațiu să nu existe decît cinci poliedre regulate?

— Asta-i altă gîscă în ceea traistă! Eu țin să accentuez că Platon nu are nici o contribuție originală în studiul lor

ca astfel să i se lege numele de poliedrele regulate. Mai degrabă ele ar putea fi numite „corpuri pitagoreice" fiindcă Timeus a fost un cunoscut pitagorician din veacul al VI-lea î.e.n.

— Mi-ai mai spus și altă dată că lui Platon nu i se datorează nici o descoperire matematică importantă și acum, din nou, te răzvrătești că în antichitate aceste corpuri purtau numele lui Platon. Dar crezi că puțin lucru înseamna faptul că el *discuta*, adică *prezenta* și *atrăgea atenția*, celor doritori de studiu, asupra poliedrelor? Consideri că mică a fost contribuția lui la răspîndirea și popularizarea matematicilor? Să nu-ți închipui că pe atunci era altfel decît este acum! Păstrînd, bineînțeles proporțiile, află că nu toți filozofii și grecii culți se ocupau de geometrie. Deși grecii au fost prin excelență geometri. Uite, zilele trecute, m-am întîlnit cu un bun prieten de-al meu, un medic excelent, cu lucrări valoroase în domeniul lui care m-a întrebat dacă nu pot să-i spun ce este un poliedru regulat, fiindcă întîlnise termenul în nu știu ce lucrare de-a lui. Mi-a mărturisit omul că știe că prisma este un poliedru, dar *poliedru regulat* e prea mult pentru el!

— În definitiv, problema nu-i chiar așa de simplă și merită să fie discutată!

— Sînt de acord cu tine ca să o reluăm mai tîrziu. Prin acest exemplu doream să-ți arăt că așa trebuie să fi fost și pe vremea lui Platon. O spune și el însuși, destul de limpede, în *Republica*: „O, Socrate, ar fi fost normal ca de la dimensiunea a doua să se treacă la cea de a treia, adică la corpurile cu înălțime, dar se pare că aceste studii nu s-au dezvoltat încă... și acum sînt într-o stare atît de ridicolă că, pînă ce Statul nu va ajuta la progresul lor, ar fi mai bine să se treacă de la geometria plană direct la astronomie!" Cred că e limpede! De aceea mă întreb dacă Teetet nu s-a apucat să-l studieze pe Timeus chiar la sugestia lui Platon? Mai mult, fiind de părere că numai adevărurile matematice puteau răspunde problemelor puse de filozofie, — pentru că Platon situa obiectele matematice între lucrurile senzoriale și ideile pure, — el a acceptat și și-a însușit corespondența

mistică stabilită de Timaeus dintre cele 5 poliedre regulate și cele patru elemente primordiale, la care adăuga, drept al cincilea element, chintesența sau eterul. Lăsînd însă deoparte latura filozofică, crezi că puțin îi datorează Euclid lui Platon? Și mai ales cu geometria în spațiu, unde, după cîte știu eu, multe dintre teoremele redate de el sînt ale lui Teetet? Poate că de aceea cei din antichitate, cunoscînd aceste fapte mai îndeaproape, au legat poliedrele regulate de numele lui Platon, ca un omagiu pentru interesul ce l-a arătat geometriei! De altfel, de abia mai tîrziu, după ce Platon a atras atenția asupra acestor corpuri remarcabile, s-au găsit și alții care să scrie despre ele ori să atribuie descoperirea lor lui Pitagora sau pitagoricienilor!

— Nu te contrazic. Cu aceste scrieri de mai tîrziu a început istoria matematicilor. De pildă Proclus, care a trăit prin veacul al V-lea al e.n., așadar, la o distanță de vreo 1 000 de ani de Platon, afirma că Pitagora a descoperit asocierea *figurilor cosmice*, — așa numea el poliedrele regulate.

— Aș vrea să precizez acuma această asociere, iar dacă am s-o greșesc, te rog mă îndreaptă. Pămîntul corespundea cubului, focul tetraedrului, aerul octaedrului, apa icosaedrului și în fine chintesența, sfera însăși a universului, corespundea dodecaedrului.

— Perfect.

— Nu-i chiar așa de perfect, după cum îți închipui tu, fiindcă îmi sînt necesare multe explicații, ca cele ce ți-am înșirat pe de rost să aibă pentru mine un înțeles deplin.

— Bine, dar știi tot așa de precis ca și mine că noi nu mai putem prinde înțelesul filozofic al acestor corespondențe, datorită formației noastre actuale! Noi avem altă cultură, altă viziune a lucrurilor și nu ne mai putem transpune în mentalitatea care era conformă cu cultura și civilizația de acum 2500 de ani!

— Nu m-am referit la aceasta, ci la lucruri mult mai prozaice. Află că și pentru mine, ca și pentru prietenul meu, cu doctoratul în medicină, se potrivește foarte bine observația lui Platon cu privire la cunoștințele geometriei în spațiu!

— Multe aș fi crezut, dar una ca asta nu! Atunci haî, copăcel-copăcel, să precizăm mai întîi că orice corp mărginit de fețe plane se numește *poliedru*.

— Asta știu. Știu și că fețele poliedrului sînt poligoane și că termenul poliedru este compus din *polis* = multe și *hedra* = față plană. Mai știu că *muchia* poliedrului este linia de intersecție dintre două fețe, că aceste două fețe formează un *unghi diedru* al poliedrului și că vîrful poliedrului este punctul în care se întîlnesc mai multe fețe ale lui, cel puțin trei. E de ajuns?

— Nu. Întîi iată un unghi poliedru (fig. 32). Este figura compusă din vîrful T, muchiile Ta, Tb, Tc, Td, Te,... în număr de $n \geqslant 3$ care formează la rîndul lor unghiurile plane aTb, bTc, cTd, ... precum și unghiurile diedre aTbc, bTcd ... Un unghi poliedru are cel puțin 3 fețe. În figură, unghiul T este pentaedru, iar unghiurile a, b c, d și e sînt toate triedre. Toate aceste unghiuri poliedre pe care le vezi în această figură se numesc și convexe pentru că nici unul dintre ele nu este străbătut de vreunul din planele care-l formează.

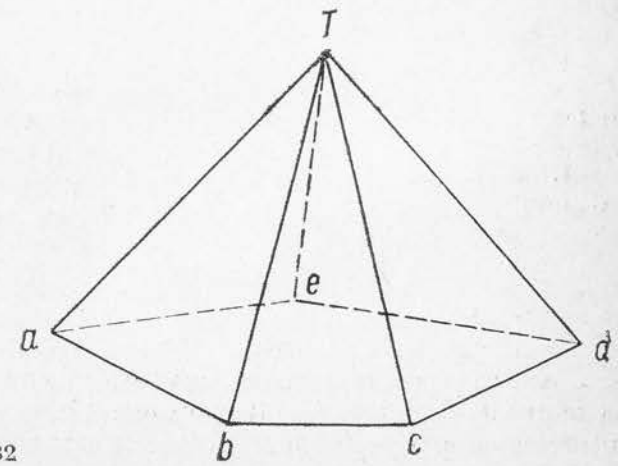


Fig. 32

— La fel ca și în cazul poligoanelor convexe!

— Și tot cam la fel sînt și următoarele două teoreme pe care am să ți le spun fără să ți le demonstrez:

1) Într-un unghi poliedru, un unghi plan este mai mic decît suma celorlalte unghiuri plane din care este compus.

2) Suma unghiurilor plane ale unui unghi poliedru convex este mai mică decît 4 unghiuri drepte.

— Dacă prima teoremă îmi este, intuitiv, evidentă, la a doua pot să-ți schițez o demonstrație „la minut". Iat-o: iau o foaie de hîrtie și, dintr-un punct T pe care îl consider a fi vîrful unghiului poliedru (fig. 33), duc o serie de semi-

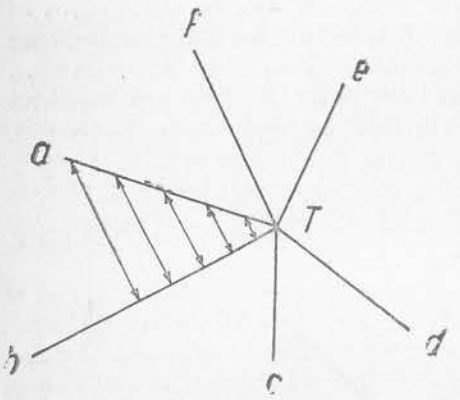


Fig. 33

drepte. Acestea vor forma muchiile unghiului poliedru numai dacă tai și îndepărtez unul dintre unghiurile plane desenate pe hîrtie, de pildă unghiul aTb iar apoi lipesc muchia aT cu bT. Or, în acest caz, e de la sine înțeles că suma unghiurilor rămase nu mai are 4 unghiuri drepte, fiindcă atîta de mare este suma tuturor unghiurilor din jurul unui punct T din plan!

— Atunci nu-mi mai rămîne decît să introduc noțiunea de regularitate și să-ți definesc întîi *unghiul poliedru regulat*, a fiind convex și avînd unghiurile plane și cele diedre egale între ele, iar apoi, *poliedrul regulat*: acela care are atît fețele

poligonale cît și unghiurile poliedre regulate și egale între ele.

— Credeam că în această definiție, care nu-mi era prea bine cunoscută pînă acum, am să dibui răspunsul la întrebarea despre numărul așa de mic de poliedre regulate, dar văd că m-am înșelat! Definiția care mi-ai dat-o despre poliedrele regulate corespunde exact cu aceea a poligoanelor plane regulate fiindcă și ele sînt convexe, au laturi egale, (în cazul poliedrelor apar fețe poligonale regulate) și unghiuri egale (iar, în cazul poliedrelor, e normal să se introducă unghiuri poliedre regulate). Atunci, de ce se pot forma o infinitate de poligoane regulate și numai 5 poliedre regulate?

— Platon a înțeles de ce, fiindcă Teetet stabilise demonstrația și i-a arătat-o. Dar, mai înainte, tot el l-a inițiat și în taina de a le construi. Euclid redă aceste descoperiri în cartea a XIII-a a „Elementelor" sale. El duce chiar și mai departe aceste descoperiri ale lui Teetet, arătînd cum se pot înscrie toate cele cinci poliedre *în aceeași sferă* și termină lucrarea sa prin demonstrația care arată că nu pot exista alte corpuri regulate în afară de aceste cinci.

— Atunci, te rog să faci și tu, pentru prietenul tău, ceea ce a făcut Teetet pentru dascălul său.

— Este imposibil, căci Teetet a creat demonstrația! Rolul meu este mult mai umil, eu am să-ți redau doar Scolia lui Euclid. După cît mi-aduc aminte, sună cam așa: „Spun că, în afară de cele cinci figuri despre care am discutat, nu se mai poate construi nici o alta, mărginită de poligoane echilaterale și echiunghiulare, egale între ele.

Căci nu se poate construi un unghi poliedru din două triunghiuri și nici din alte două figuri plane. Dar cu trei triunghiuri se poate construi vîrful piramidei, cu patru triunghiuri al octaedrului, cu cinci acela al icosaedrului. Însă cu 6 triunghiuri echilaterale, reunite într-un punct, nu se va forma un unghi poliedru, căci unghiul triunghiului echilateral fiind de 60° șase vor fi egale cu 360°, adică cu 4 unghiuri drepte, ceea ce nu se poate. Din aceeași cauză un unghi poliedru nu se va putea construi cu mai mult decît șase dintre aceste unghiuri plane. La cub, în jurul unui vîrf

sînt trei pătrate și patru pătrate nu pot forma un unghi poliedru căci intervin din nou patru unghiuri drepte. Cît despre pentagoanele echilaterale și echiunghiulare, trei formează vîrful dodecaedrului, iar patru dau o sumă mai mare decît patru unghiuri drepte, deci nu pot forma un unghi poliedru. Cu alte poligoane regulate, din aceeași cauză nu se mai poate construi un unghi poliedral. Așadar, în afară de cele cinci figuri menționate, nu se mai poate construi o alta mărginită de poligoane echilaterale și echiunghiulare, ceea ce a fost demonstrat!"

— Ce simplă și frumoasă demonstrație. Plină de vrajă, ca o melodie, căci în loc să-și facă loc numai în minte s-a cuibărit și în inimă! Mi se pare că o cunosc de mult, deși sînt sigur că n-am auzit-o niciodată. N-ai vrea să ne jucăm pe rînd cu fiecare dintre aceste poliedre? De construit nu, asta va fi mai greu să urmăresc acum, dar mi-ar plăcea să le schițăm și să le caracterizăm mai îndeaproape. Astfel am admira și noi, alături de Platon, acea lege de economie la care pare că se supune realitatea spațială care l-a și condus să găsească în poliedrele regulate o imagine a ceea ce considera el că sînt „elementele primordiale" ale Universului.

— Bine, atunci să mergem de la simplu la compus și să începem cu tetraedrul. Fețele lui, în număr de 4, sînt triunghiuri echilaterale. Are 4 vîrfuri și 6 muchii. Îți mai aduci aminte de formula lui Descartes — Euler?

— Cum nu: $F + V = M + 2$, unde F = numărul fețelor, V, al vîrfurilor și M, al muchiilor.

— Atunci să o verificăm: $4 + 4 = 6 + 2$! Și acum, fiindcă ai vrut să te joci, hai să-l și construim! Nu te teme! E tot o jucărie și asta! Se dă lungimea muchiei, fie ea M. Cele patru triunghiuri echilaterale formează un triunghi echilateral cu latura 2M (fig. 34). Iată deci *desfășurarea* plană a tetraedrului. N-ai decît să-l îndoi de-a lungul muchiilor și apoi să le lipești, ca să obții tetraedrul. Vrei să-i afli și înălțimea? Atunci, știind că ea cade în centrul O al triunghiului ABC de la bază (fig. 35), îi determini lungimea din triunghiul TOC, unde OC=R este raza cercului circumscris

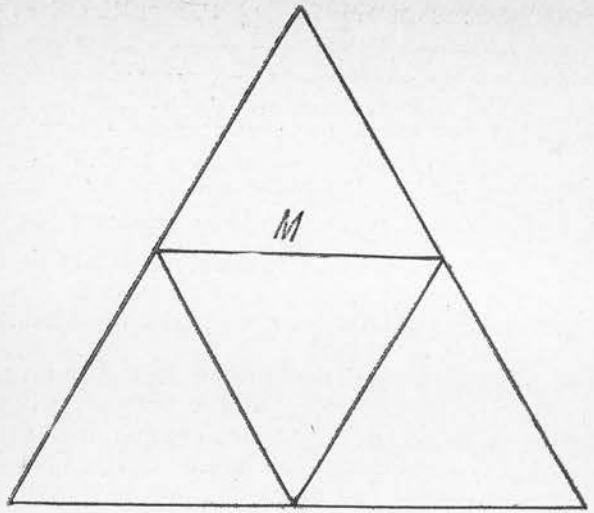


Fig. 34

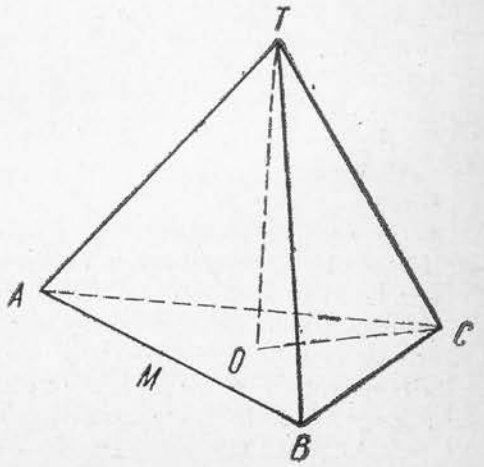


Fig. 35

triunghiului ABC. Din $M = R\sqrt{3}$, rezultă $OC = \frac{M}{\sqrt{3}}$ și deci $OT = \sqrt{M^2 - \frac{M^2}{3}}$ sau $OT = M\sqrt{\frac{2}{3}}$. După ce ai desenat triunghiul echilateral ABC, de latură M, ridici din centrul lui o perpendiculară de lungime $M\sqrt{\frac{2}{3}}$ și ai găsit astfel cele 4 vîrfuri ale tetraedrului: T, A, B, și C!

— Curată jucărie! Și totuși, prin numărul mic de fețe evocă parcă uscăciunea și forma focului tot așa de bine ca și prin vîrfurile sale penetrante, care parcă ar sfărîma și ar distruge tot ce-i în jurul lui!

— Știu că pitagoricienii priveau tetraedrul și ca un simbol sacru, care reprezenta însăși materia compusă din cele 4 elemente ale ei: focul, aerul, pămîntul și apa. S-a păstrat de atunci chiar și următoarea formulă a unui jurămînt al inițiaților pitagoricieni: „Jur, prin acela care a dat sufletelor noastre *tetraedrul*, izvorul naturii eterne!"

— Desfășurarea cubului ți-o pot face imediat chiar eu. Alătur 6 pătrate de muchie M, pe care le îndoi după muchii! (fig. 36) În felul acesta obțin un cub, pe care dacă vrei ți-l și desenez ca să-i număr fețele: 6, vîrfurile: 8. Muchiile nu le mai număr fiindcă adun 6 + 8 = 14, așadar cubul are 12 muchii! (fig. 37).

— Grozav mai ești! Adică altfel, fără de formulă, nu știai tu cîte muchii are un cub?

— Știam, nu știam, treaba mea! Acum e rîndul tău să-mi arăți prin ce calități și-a cîștigat cubul dreptul de a reprezenta pămîntul?

— Poate prin stabilitate, prin soliditate, prin rectitudine și, poate încă, prin faptul cum își aruncă umbra.

— Le-ai citit undeva, că doar nu le știai tu, așa de la sine, prea le-ai spus „ca din carte".

— Nu mi-ai pus această condiție! Dar dacă așa ți-e vorba, poftim alta ca din carte! Uite, desenez un hexagon regulat înscris într-un cerc și acum rad marginea cercului ca să rămînă numai hexagonul și centrul lui. Duc cele 6 raze

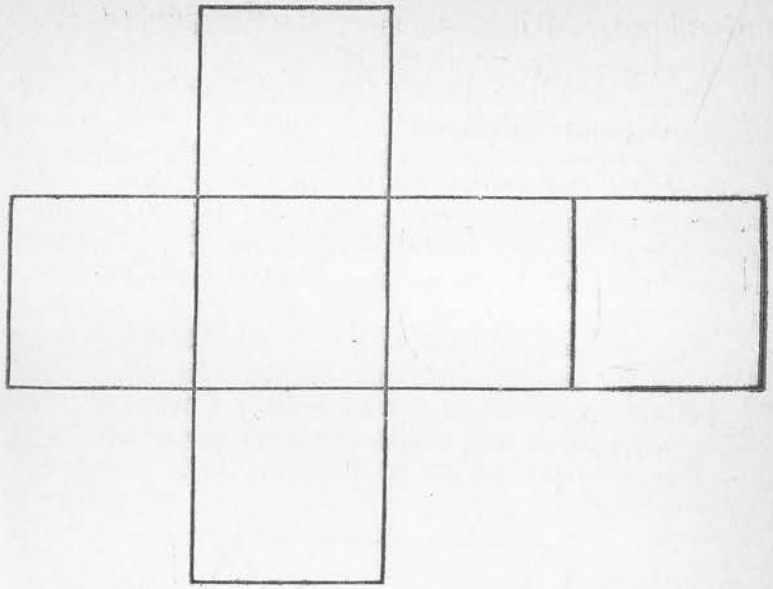


Fig. 36

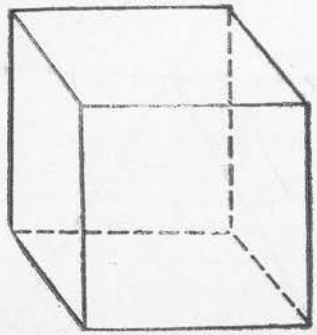


Fig. 37

alternînd una cu linie punctată și alta cu linie plină. Spune-mi repede, ce vezi? (fig. 38).

— Mare șmecher mai ești! Un cub, numai că-i așezat într-o poziție cam nestabilă!

— Atunci desenează un cub mai mare și într-o poziție mai stabilă! Definesc ca *poliedre regulate reciproce* două poliedre construite în așa fel ca centrele fețelor (poligoanelor) unuia să fie vîrfurile celuilalt. E clar că regularitatea unuia dintre poliedre atrage și regularitatea celui reciproc lui.

— Prin urmare, poliedrul reciproc unui poliedru dat are atîtea vîrfuri cîte fețe are acesta și are atîtea fețe cîte vîrfuri are poliedrul considerat! Așa că poliedrul reciproc unui cub are 8 fețe și 6 vîrfuri, ceea ce înseamnă că e un octaedru!

— Dacă reușești să-l desenezi ai nota 10 la purtare!

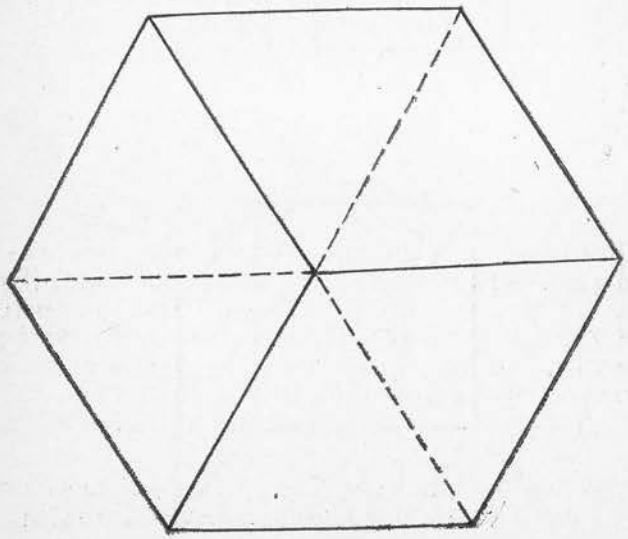


Fig. 33

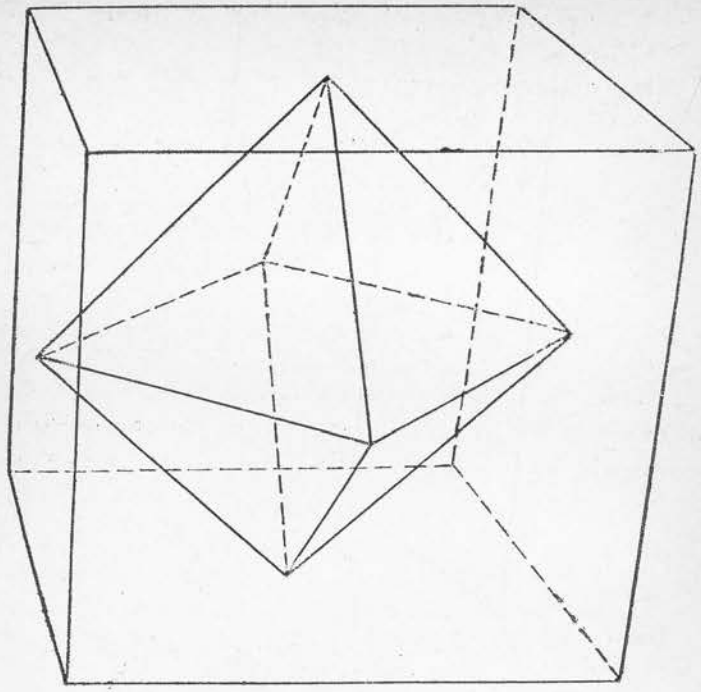


Fig. 39

— Iată-l, deși nu a fost prea simplu, așa cum te-ai convins, după ștersăturile pe care le-am avut de făcut! (fig. 39) Să caracterizăm deci octaedrul: 8 fețe triunghiuri echilaterale, 6 vîrfuri și 12 muchii. Apare ca format din două piramide cu baza un pătrat, suprapuse după această bază. Nu găsești că forma lui are în adevăr ceva aerian? Pare că ar fi suspendat de o axă și e gata, gata să se împrăștie în cele patru vînturi!

— Chestie de imaginație. Oricum, e interesant de remarcat legătura dintre pămînt (cub) și aer (octaedru) stabilită prin reciprocitatea celor două corpuri, lucru care a fost cunoscut

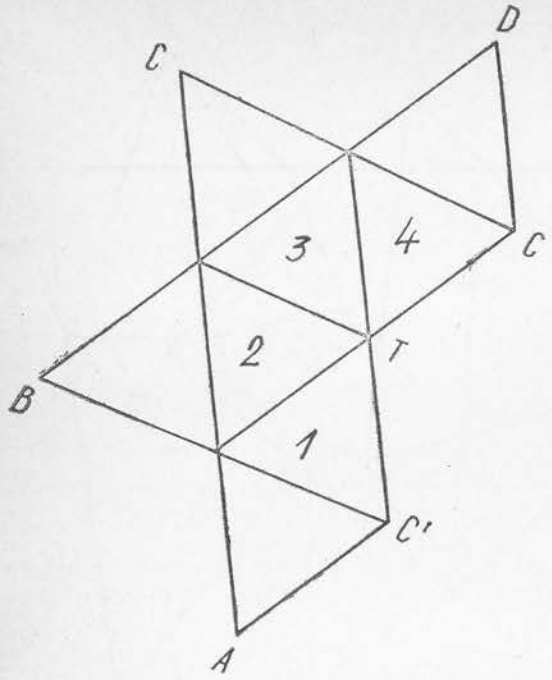


Fig. 40

de către greci, căci în cartea a XV-a a Elementelor lui Euclid există problema de a înscrie un octaedru într-un cub.

— Dar mi se pare că ultimele două cărți ale Elementelor, a XIV-a și a XV-a, se consideră că nu au fost scrise de Euclid?

— Foarte adevărat, cartea a XIV-a e aproape sigur că a fost compusă de Hypsicle din Alexandria, matematician care a trăit prin veacul al II-lea î.e.n., iar cartea a XV-a, atribuită multă vreme tot lui Hypsicle, pare să fie scrisă de Damascius din Damasc din veacul al VI-lea al e.n. Autorul conducea școala din Atena pe la începutul veacului al VI-lea. Important este faptul că problemele legate de proprietățile poliedrelor se dezbăteau în continuare, începînd, poate, de

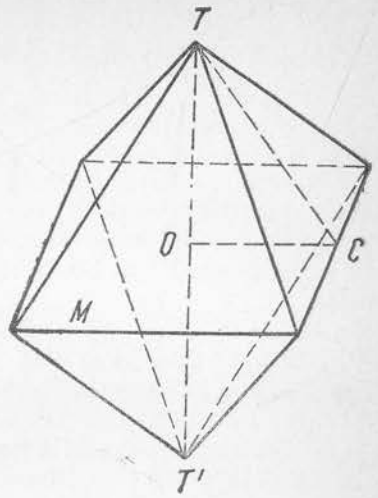


Fig. 41

pe vremea lui Pitagora. Dar ne-am luat cu vorba și nu am stabilit cum se construiește și se desfășoară octaedrul!

— De desfășurat ar fi mai ușor: 8 triunghiuri echilaterale egale și legate între ele; patru (anume triunghiurile: 1, 2, 3 și 4) au să formeze piramida inferioară dacă unesc muchiile TC și TC' iar cea superioară se strînge automat dacă unesc toate vîrfurile A, B, C și D într-un singur punct (fig. 40). Construcția? Asta-i mai albastru!

— Nicidecum, uită-te aici! Fie M muchia octaedrului (fig. 41). Desenez pătratul de latură M de la baza comună a piramidelor și trebuie să stabilesc cît de mare-i înălțimea dusă din centrul lui O, cu condiția ca și muchiile laterale să fie tot de lungimea M. Fie și T T' cele două vîrfuri iar $OC = \frac{M}{2}$. Din triunghiul COT rezultă: $OT = \sqrt{CT^2 - CO^2}$ dar $CT = \frac{\sqrt{3}}{2} M$ așa că $OT = \sqrt{\frac{3}{4} M^2 - \frac{M^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} M$.

Dacă iau pe perpendiculara TOT' din centrul pătratului de latură M lungimea $\frac{\sqrt{2}}{2}$ M, de o parte și de alta a punctului O, obțin vîrfurile 5 și 6 ale octaedrului! Nu ne mai rămîne acum altceva de făcut decît să iscodim alt poliedru. Ca să ne ținem de tipicul din cartea a XIII-a a *Elementelor*, cu alte cuvinte de ordinea folosită de Euclid dar stabilită pesemne de alții de mai înainte, să ne ocupăm întîi de icosaedru și apoi de dodecaedru.

— Icosaedrul are 20 de fețe, toate triunghiuri echilaterale.

— Dar mai are 12 vîrfuri și 30 de muchii, din fiecare vîrf pornind cîte 5 muchii.

— Ia stai! Dacă din fiecare vîrf pornesc cîte 5 muchii, și sînt 12 vîrfuri, atunci de ce nu sînt 60 de muchii?

— Tot din același motiv pentru care sînt numai 20 de fețe în loc să fie 60 de fețe, fiindcă în fiecare vîrf al icosaedrului se întîlnesc cîte 5 fețe!

— Bine m-ai descurcat, n-am ce zice! Cu muchiile, treacă-meargă, o scot la capete, fiindcă o muchie este comună la două vîrfuri și deci am să socotesc 5 ori 6 care fac 30!

— Iar în cazul fețelor, ținînd seamă că ele sînt triunghiuri, adică o față este comună la 3 vîrfuri, rămîne să înmulțești pe 5 cu 4!

— Complicată figură, nici nu știu cum ai s-o desenezi! Atîtea fețe... piramide pentagonale care se îmbucă unele pe altele... parcă mă cuprinde și pe mine umezeala apei!

— Aici vroiai mata să ajungi? La simbolism? Uitasem de asta, dar nu mă pot împiedica să nu-ți admir puterea de imaginație. Se prea poate ca aceste unghiuri poliedre obtuze să evoce, prin forma lor globulară, tendința de a umple vasul, pe care o manifestă apa. Cît privește figura în sine, nu-i chiar așa de complicată și mă întreb îngrijorat ce s-ar întîmpla, dacă aș avea fantezia să-ți amintesc și despre poliedrele semiregulate ale lui Arhimede — 13 la număr — sau încă, de cele 4 poliedre regulate stelate? Nu, nu te speria, nu am să abuzez de delicata ta materie cenușie, mai mult

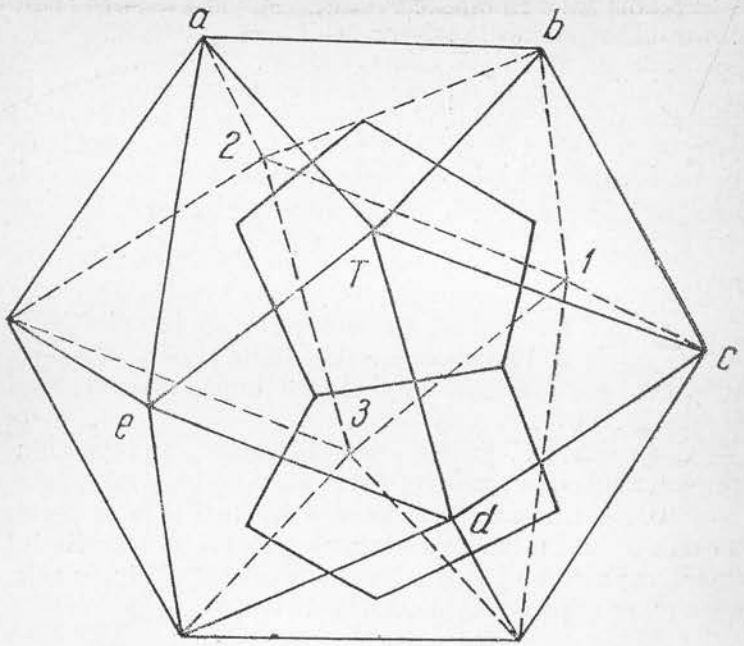


Fig. 42

decît poate ea suporta! Văd că stai cu răspunsul pe limbă, dar lasă-l nerostit și privește cît de ușor se desenează un icosaedru. Întîi fac un hexagon, ca adineauri la cub! (fig. 42). Apoi îmi aleg un punct în interior, uite aici în T, și construiesc conturul exterior, ca și cum l-aș vedea de deasupra, al unei piramide pentagonale regulate (Tabcde). Natural că țin seamă de faptul că totul se vede în perspectivă. Apoi din fiecare vîrf, în afară de cele 3 care aparțin hexagonului (adică e și d), construiesc alte două piramide pentagonale. Pe partea vizibilă am, de toate, 9 vîrfuri. Îmi rămîn 3 pe partea invizibilă pe care am să le desenez cu linii punctate. Le vezi? Ca să le urmărești mai ușor le numerotez: 1, 2 și 3.

— În adevăr! Te pomenești că te-ai încumeta să-mi mai torni în el și poliedrul reciproc lui?!

— De ce nu? Bănuiești cine are să fie?

— Unind cele cinci centre ale fețelor triunghiulare legate de un vîrf al icosaedrului, obțin un pentagon. Cele 12 vîrfuri se transformă deci în 12 fețe pentagonale, iar cele 20 de fețe ale icosaedrului devin 20 de vîrfuri ale *dodecaedrului*, căci despre el este vorba, nu-i așa? Dar cu desfășurarea icosaedrului ce se aude?

— Desfășurarea? Parcă erai cuprins de umezeală, cum de n-ai uitat de ea? Uite-o aici, într-o formă foarte elegantă: 10 triunghiuri formînd un paralelogram cu laturile M și 5 M, iar celelalte 10 distribuite de o parte și de alta a celor două laturi paralele mai lungi. Îndoi după muchii și apoi lipești (fig. 43).

— Va să zică, trei dintre poliedrele regulate au fețe triunghiulare, unul singur are fețele sale pătrate și celălalt pentagoane! Desfășurarea dodecaedrului e foarte ușor de realizat. Uite cum o văd eu: fac un pentagon regulat și pe laturile lui construiesc alte cinci. Apoi copiez modelul și lipesc cele două desene după o muchie. E bine? (fig. 44).

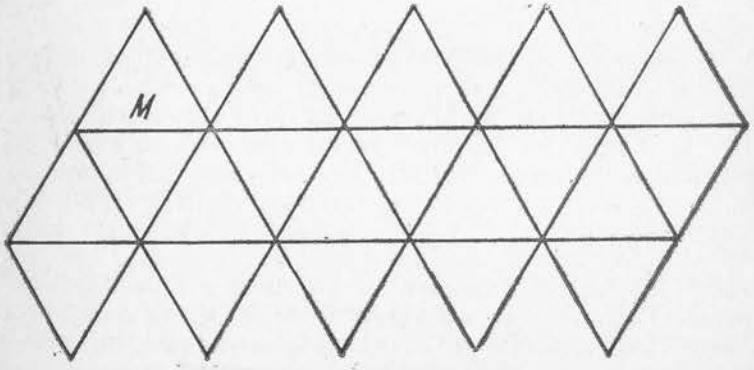


Fig. 43

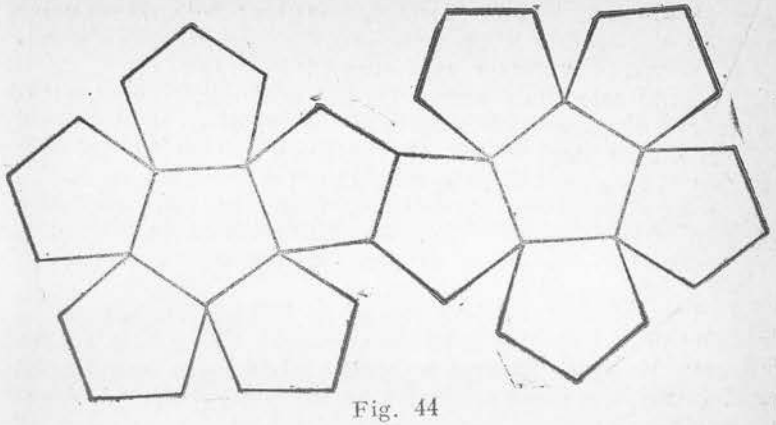


Fig. 44

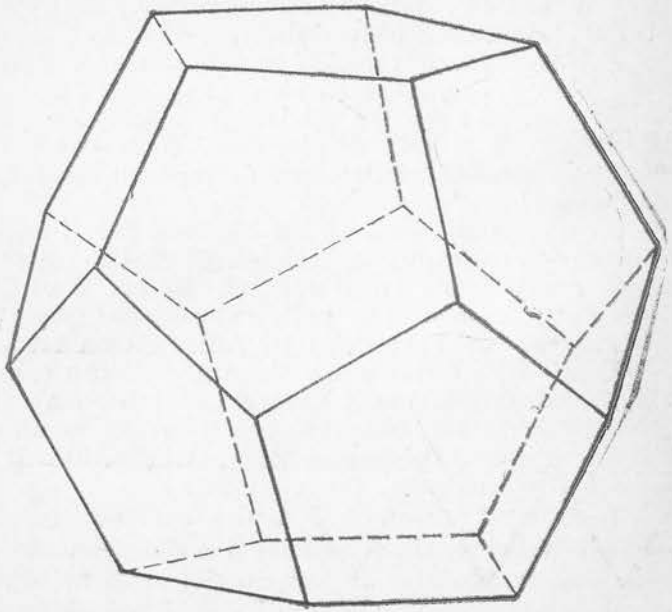


Fig. 45

— Mai încape vorbă? Acuma poate că încerci și desenul lui în perspectivă că doar nu degeaba-i semnul chintesenței, al Universului în toată splendida lui înfățișare!

— Să încerc, fiindcă nu-i prima oară cînd l-am desenat. Are 12 fețe, atîtea cîte semne are zodiacul și, dintre toate poliedrele regulate înscrise în aceeași sferă, el este acela care se apropie cel mai mult de sferă, deci le învăluie pe toate, așa după cum o face și cerul. Ca și cubul, el are mai multe vîrfuri decît fețe: 20 de vîrfuri și numai 12 fețe (fig. 45).

— Aceasta l-a făcut pe Kepler să privească dodecaedrul și ca pe un simbol al efortului!

— Pînă acum nu mi-ai spus că și Kepler s-a ocupat de studiul poliedrelor! Știu că era astronom, că, pe baza legilor descoperite de el, Newton a putut stabili legea gravitației universale, dar n-am știut că l-au interesat poliedrele regulate, și încă, după cît am înțeles din aluzia ta, a urmărit pînă și analogiile, stabilite în antichitate, dintre aceste poliedre și elementele universului...

— Ești un om fericit dacă ți se pare că *numai atîta* n-ai știut! Ai să știi și asta, cînd i-a veni vremea.

— Și încă nu i-a venit? Dacă-i așa, mă duc să fac o cafea!

— Satul arde și baba se piaptănă! Tocmai acuma ți-ai găsit și tu să pleci, cînd aveam de încheiat socotelile cu dodecaedrul!

— Care socoteli? Crezi că nu bănuiesc care-i poliedrul reciproc dodecaedrului? E icosaedrul! Mai degrabă m-ai lămuri cum rămîne cu tetraedrul. El are 4 vîrfuri și 4 fețe și dacă construiesc poliedrul reciproc găsesc unul tot cu patru vîrfuri și patru fețe? Adică tot un tetraedru?

— Exact așa! Tetraedrul e singurul poliedru asimetric față de centrul figurii sale. El nu are nici diagonale și nici plane diagonale. Iar poliedrul reciproc lui este un alt tetraedru, pe care am să ți-l desenez acum, aici (fig. 46), cît timp tu ai să fierbi cafeaua.

— Te-ai mirat auzind că și Kepler a cercetat proprietățile poliedrelor regulate, a reluat discuția prietenul meu. Faima lui, ca fondator al Astronomiei moderne, datorită descoperirii celor trei legi care-i poartă numele, a făcut

ca toate celelalte merite ale lui din domeniul matematicilor să fie uitate sau puse pe planul al doilea. Născut înspre sfîrșitul veacului al XVI-lea, trebuie să-ți închipui cît de talentat la învățătură a fost, ca să poată deveni profesor de matematici în Graetz la 22 de ani. Lucrările lui de geometrie sînt numeroase și poartă amprenta cercetărilor moderne. El a studiat proprietățile conicelor și chiar numirea de *focare* i se datorește lui. A stabilit volumele corpurilor rotunde printr-o metodă care anticipează pe aceea a lui Newton și Leibniz. El a publicat, odată cu Briggs, prima tabelă de logaritmi zecimali și s-a ocupat îndeaproape de probleme

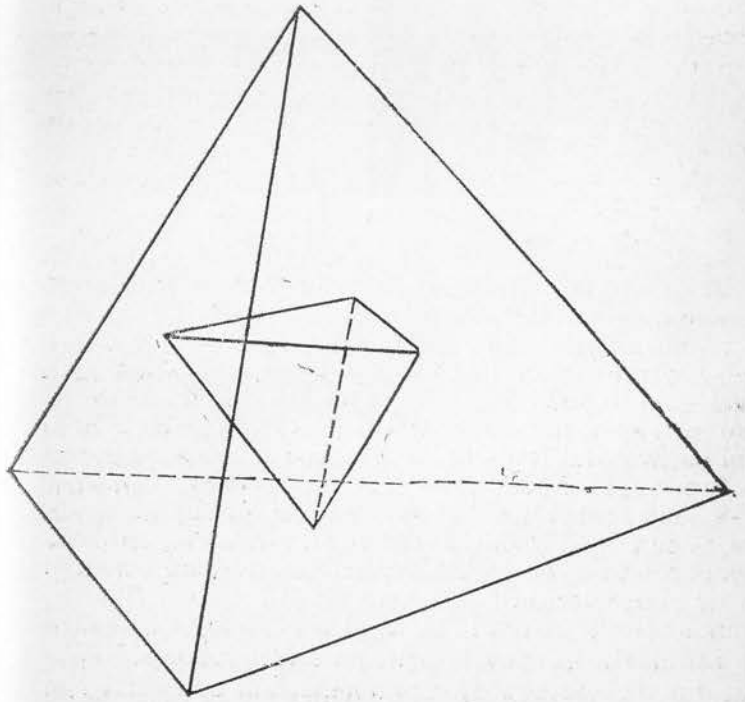


Fig. 46

Tycho-Brahé

de optică. De astronomie s-a apucat mai tîrziu; devenind ajutorul lui Tycho-Brahé, el folosește observațiile acestui destoinic astronom, ca să-și stabilească legile după care se rotesc planetele în jurul Soarelui.

— Nu ți se pare curios că Tycho-Brahé, care a făcut observațiile și a obținut datele, nu a putut întrezări aceste legi, deși era un astronom vestit? Cred că era chiar astronomul împăratului Rudolf al doilea, sau astrologul lui, parcă așa am citit eu odată, undeva?

— Să încep cu răspunsul la ultima ta întrebare: da, a fost atașat curții lui Rudolf al doilea și, la moartea lui Brahé, locul acesta i-a fost dat lui Kepler. Era, așa cum a continuat să fie și Kepler, atît astronom cît și astrolog, fiindcă pe atunci astrologia era la modă și era cultivată cu mult zel de astrologi, pentru veniturile pe care le aducea. Kepler a dus o viață foarte grea, se pare că a avut o nevastă foarte luxoasă și o sumedenie de copii. Pe lîngă aceasta, a fost dat afară de la catedra sa și de la curte, fiind socotit eretic.

Așa că, după aceea, a trebuit să trăiască numai din horoscoape. Iată cum privea el aceasta: „Natura care a dat fiecărui animal mijloacele lui de existență, a dat astrologia ca accesoriu și aliată a astronomiei"!

— Așadar, el făcea horoscoape, fără ca să creadă în ele?

— Cam așa! Știa el săracul ce știa, în această privință, căci se spune că după o primă căsătorie foarte nefericită cînd a hotărît să se însoare a doua oară, și-a ales nevasta din unsprezece candidate. Ca să nu se înșele, le-a făcut la toate horoscopul și a ales-o pe aceea care a avut horoscopul cel potrivit. Rezultatul? Acela care l-a făcut să spună cele ce ai auzit! Și acum, să lămurim și cea dintîi nedumerire a ta, aceea cu privire la descoperirea legilor planetare. Te miră că avînd observațiile în fața lui, Tycho-Brahé nu a văzut aceste legi? Pe mine nu mă miră deloc, fiindcă eu văd în Tycho-Brahé tipul unui muncitor onest și desăvîrșit și nimic mai mult. El nu avea stofă de creator, ci de executant! Sta seară de seară, ori de cîte ori era senin, și observa pozițiile stelelor sau ale planetelor. Niciodată nu ar fi lipsit de la această datorie; boală, oboseală, indispoziție erau cuvinte care nu aveau ecou în sufletul lui, el știa că *trebuie* să observe cerul și o făcea cu sîrg, cu bucurie și chiar cu dragoste, tot așa după cum, a doua zi de dimineață, calcula din observațiile notate coordonatele stelelor respective. Ba a făcut chiar mai mult, a încercat să amelioreze metodele foarte greoaie pe atunci de calcul, adoptînd metoda numită „prostaferesis" despre care ți-am vorbit cîndva. El a murit cu vreo 13 ani mai înainte ca Neper să fi publicat invenția sa. Cu aceeași conștiinciozitate executa, după regulile în vigoare, și horoscoapele cerute de împărat sau de ceilalți curteni, dar cred că nu și-a pus niciodată, în adîncul inimii lui, întrebarea dacă există o rațiune temeinică pe care se bazează aceste reguli sau nu. Se potriveau prezicerile lui? bine, foarte bine chiar! Nu se potriveau ?cine știe de ce? S-au supărat stelele? a greșit vreun calcul? să vadă, în serile următoare, va continua cercetările și apoi va face alte calcule! Mai mult nu i se putea

cere lui, el a respectat toate indicațiile și nu a precupețit nici un fel de osteneală! Pe Kepler însă nu-l ispitea deloc rolul modest de executant, oricît de importantă ar fi fost echipa în care s-ar fi angajat! Kepler a găsit aceste trei legi de mișcare ale planetelor, pentru că el le-a căutat! El a căutat cauza acestor mișcări regulate și armonioase pe care nu le putea atribui hazardului și așa a ajuns să intuiască forța motrice care comanda și conducea aceste revoluții planetare. Ca să o exprime printr-o formulă matematică, pentru el ar fi fost imposibil, pentru că nu exista încă metoda analitică necesară unor asemenea realizări. A putut-o face numai Newton, cu vreo jumătate de veac mai tîrziu, bazîndu-se pe legile descoperite de Kepler, dar și el de-abia după ce descoperise *calculul* infinitezimal, accentuez că e vorba de descoperirea calculului în sine, căci metoda o întrezărise oarecum și Kepler. Newton a stabilit deci expresia matematică a forței de gravitație care ține planetele în continuă mișcare în jurul Soarelui, forță despre care Kepler vorbește deslușit în Fizica sa cerească, arătînd că atît mișcarea Lunii în jurul Pămîntului cît și producerea mareelor sînt efecte ale forței de atracție a pămîntului. Neputînd exprima sau, mai bine zis, nebănuind pe ce cale ar putea ajunge la o formulă unică a acestei forțe, formulă în care să se cuprindă și prin care să se exprime diversele constante caracteristice ale sistemului planetar, ca, de pildă, distanțele planetelor față de Soare sau între ele, vitezele lor de translație, și așa mai departe, Kepler a folosit în acest scop analogia dintre sistemul planetar și sistemul celor 5 poliedre regulate. De armonia geometrică a corpurilor regulate a fost atras din tinerețe. Prima lui lucrare privind cosmografia cuprindea un studiu al poliedrelor regulate în care el observa că la cercetarea proprietăților acestor poliedre participă, în aceeași măsură, atît sensibilul cît și inteligibilul, dînd astfel impresia frumosului și trezind bucuria de a fi găsit aceste proprietăți geometrice.

— Cu alte cuvinte, el motivează armonia geometrică a poliedrelor, ca pe o proprietate intrinsecă a lor, provenind din însăși natura lor?

J. Kepler

— Da, și de aceea considera că această *armonie geometrică* o poate lua ca etalon în discutarea armoniei universale sau a armoniei muzicale etc. Kepler a fost profund emoționat de strînsa înrudire ce a putut-o stabili între cele 5 poliedre regulate, exprimată prin diversele proprietăți geometrice de reciprocitate și, timp de peste 20 de ani, va urmări și dezvolta aceste idei, dîndu-le amploarea pe care o găsim în vestita lui carte: Harmonice Mundi. Întîi, el a observat înrudirea care există între numărul fețelor și al vîrfurilor, care caracterizează fiecare poliedru, apoi aceea care apare prin corespondența dintre poliedrele conjugate.

— În adevăr avem: *cubul* conjugat cu *octaedrul*, *dodecaedrul* cu *icosaedrul* și *tetraedrul* conjugat cu el însuși.

— Așa-i, dar Kepler a observat că această cuplare se exprimă matematic prin raportul dintre raza sferei circumscrise și raza sferei înscrise fiecăruia dintre aceste poliedre, fiindcă acest raport nu poate lua decît 3 valori, deși sînt de toate 5 rapoarte diferite.

— Adică raportul păstrează aceeași valoare în cazul poliedrelor conjugate?

— Da.

— Deși am amintit la fiecare poliedru caracteristicile lui, aș vrea să întocmesc un tablou general, ca să le văd acum în lumina ideilor lui Kepler:

Poliedru	vîrfuri	fețe	muchii
Tetraedru	4 (triedre)	4 (triunghiuri)	6
Cubul	8 (triedre)	6 (pătrate)	12
Octaedru	6 (tetraedre)	8 (triunghiuri)	12
Dodecaedru	20 (triedre)	12 (pentagoane)	30
Icosaedru	12 (pentaedre)	20 (triunghiuri)	30

— Aceste relații sînt însă cele mai simple. Kepler a stabilit o mulțime altele, de pildă, că suprafața tetraedrului este $\frac{2}{3}$ din a octaedrului înscris în aceeași sferă sau că volumul tetraedrului este $\frac{1}{3}$ din a hexaedrului, adică a cubului înscris în aceeași sferă, sau că suprafața tetraedrului este $\frac{1}{5}$ din suprafața icosaedrului care are aceeași muchie, ca să nu-ți mai amintesc despre nenumăratele rapoarte ce le-a găsit între numărul vîrfurilor și al muchiilor etc. etc., între lungimea muchiilor poliedrelor înscrise în aceeași sferă și iar, etc., etc. În unele dintre aceste rapoarte el a identificat intervalele fundamentale din muzică, dar despre acestea nu am să-ți vorbesc deloc. Am să mă refer numai la unele analogii pe care le-a pus în evidență în legătură cu elementele sistemului planetar. Așa, de pildă, luînd ca rază

a sferei distanța de la periheliul[1] lui Saturn la Soare și înscriind în această sferă un cub, raza sferei înscrise în acest cub reprezintă, aproximativ, distanța mijlocie de la Jupiter la Soare. Tot așa, dacă se înscrie în sfera cu raza cît distanța periheliului lui Jupiter un tetraedru, raza sferei înscrise în tetraedru este aproximativ cît distanța afeliului lui Marte și așa mai departe.

— Îmi închipui cît trebuie să fi calculat Kepler ca să ajungă la aceste rezultate, că doar nu le-a găsit așa dintr-o dată! Cîte încercări, ba cu un poliedru, ba cu altul...

— Le făcea din pur și simpla lui plăcere. Aceste calcule erau, în adevăr, extenuante pe vremea aceea, mai ales pînă au apărut logaritmii zecimali, calculați tot de el, dar n-ai de ce să-l căinezi! El însuși scrie undeva că aceste cercetări i-au dat cele mai alese desfătări. Iată încă și alte potriveli care i-au cerut alte multe calcule: raportul razelor sferelor înscrise și circumscrise, dodecaedrului, sau icosaedrului cu care acest raport este egal, — dă intervalul distanțelor dintre Marte și Pămînt și dintre Pămînt și Venus. Folosind celelalte două poliedre conjugate: cubul și octaedrul, găsește alte distanțe, dar nu are rost să intru în amănunte.

— Desigur că n-am de gînd să-l „căinez", cum spui tu, pe Kepler pentru răbdarea și perseverența cu care a urmărit aceste calcule, ci să-i admir ideea de a găsi în poliedrele regulate un model care să-i permită să dovedească unitatea și armonia sistemului planetar! Și, după cîte am înțeles eu, spre deosebire de Pitagora și Platon, el nu a dat o atenție deosebită dodecaedrului, ci l-a considerat de-a valma cu celelalte poliedre.

— Bine, dar Pitagora, și mai tîrziu Platon, au privit poliedrele regulate din cu totul alt punct de vedere decît a făcut-o Kepler și în alt scop! Ei le-au considerat capabile să răspundă unei alte imagini unitare și armonioase a universului, prin corespondența pe care au stabilit-o între aceste

[1] *periheliu* înseamnă distanța cea mai mică a planetei de Soare, *afeliu* cea mai mare. Aceste puncte sînt vîrfurile axei mari ale elipsei descrise de planeta respectivă în jurul Soarelui.

poliedre și elementele primordiale, în număr numai de patru. Fiindcă unul dintre poliedre trebuie lăsat deoparte, acesta nu putea fi altul decît dodecaedrul, care se singulariza de la sine prin faptul că era cu fețe pentagonale. Or, construiri de triunghiuri și pătrate nu puneau nici un fel de probleme deosebite matematicienilor greci, pe cînd construcția pentagonului, da! Era vorba de împărțirea unui segment de dreaptă după un *raport extrem și mediu*.

— Știu foarte bine, e tăietura de aur pe care a descoperit-o Pitagora ori pitagoricienii, fapt revelat prin pentagramă, ca semn de recunoaștere și, mai ales, prin impresionanta legendă a lui Hippase din Metaponte, exclus din secta pitagoricienilor pentru că a descoperit secretul construirii dodecaedrului regulat — sfera din 12 pentagoane.

— În adevăr, se pare că pitagoricienii au descoperit construcția geometrică a pentagonului și apoi a dodecaedrului. Aceste construcții trebuiau ținute ca o mare taină pentru că ele dovedeau incomensurabilitatea dintre latura și diagonala pentagonului, adică recunoșteau existența *numărului irațional*, fapt în totală contrazicere cu doctrina pitagoricienilor că *numărul întreg* este esența însăși a lumii! Află însă că dodecaedrul, ca obiect, a fost cunoscut cu mult mai înainte, încă de pe vremea celților și a etruscilor. Nu știu dacă ți-am vorbit vreodată despre un articol al lui Ferdinand Lindemann în care se ocupă de această problemă?

— Nu, dar despre care Lindemann este vorba, poate de acela care a descoperit transcendența numărului π?

— Exact despre el. După cum vezi, avea un orizont larg de preocupări. Acest articol, intitulat „Despre istoria poliedrelor și despre numere", a apărut în 1897, 15 ani după celebrul memoriu asupra numărului π, în Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu München[1]. Autorul arată că au fost descoperite 28 de exemplare de dodecaedre regulate turnate din bronz, datînd din perioada Ten și aparținînd culturii celtice, precum și alte multe corpuri

[1] Procesele Verbale ale Academiei de științe din München.

poliedrice regulate și semiregulate la fel de vechi. Acest studiu este deosebit de interesant, în multe privințe, mai cu seamă cu privire la concluziie care decurg din faptele expuse.

— Atunci, spune-mi și mie ce-ți mai aduci aminte din el.

— E imposibil, pentru că nu ar intra în subiectul nostru, dacă ți-aș vorbi despre toate cîte-mi aduc aminte! E o interpretare acolo a unor semne, ce par să fi fost cifre etrusce, de compararea lor, de discuția unor documente... ei! mai dorești să-ți spun tot ce-mi aduc aminte?

— Lasă gluma, știi bine la ce m-am gîndit și hai, nu mai face nazuri!

— Iacă, nu le mai fac! Întîi Lindemann descrie, folosind multe lucrări de arheologie, 26 de dodecaedre turnate în bronz, toate la fel, goale în interior și avînd o mărime potrivită ca să fie ușor de ținut în mînă. Fiecare față este găurită, gaura, de formă circulară, nu are aceeași rază pe fiecare față a dodecaedrului. În plus, suprafața liberă, rămasă pe fiecare față, este decorată cu alte cercuri mai mici care înconjoară gaura sau umplu colțurile. Cele 20 de vîrfuri ale dodecaedrului sînt și ele înconjurate de niște măciulii (fig. 47). Toate aceste dodecaedre au fost descoperite în localități foarte îndepărtate unele de altele din Anglia, Belgia, Elveția, Franța, Germania, Olanda, ținuturi locuite odinioară de celți, ceea ce-l determină pe Lindemann să le clasifice drept *dodecaedre celtice*. Dar acestea nu sînt singurele; în Spania s-a găsit un alt dodecaedru, deosebit ca mod de prezentare de acelea descrise pînă acum și care se găsesc, azi, în diferitele muzee din țările amintite. Cel din Spania este masiv iar pe fețele lui sînt însemnate prin cerculețe un număr de puncte, care variază de la unu la șase, exact ca la zaruri. Cel mai interesant însă, atît prin vechime cît și prin prezentarea lui, este *dodecaedrul găsit în săpăturile de pe muntele Loffa*, în Italia de nord. El este săpat în piatră, cîntărește aproximativ 200 de grame și are o culoare brună. După cercetările și părerile mai multor arheologi, acesta este de origine etruscă. Pe fețele lui sînt săpate semne, nedescifrate încă, care după înfățișare sînt formate din aceleași

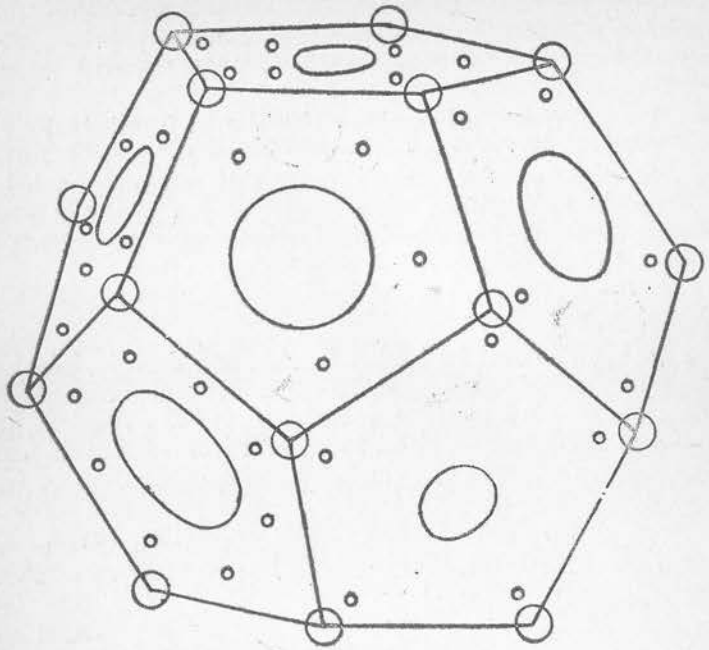


Fig. 47

elemente ce se află la baza cifrelor etrusco-romane: /, V, Λ, + și X, semne ce se găsesc și pe măsurile de greutate, descoperite tot prin acele părți, datînd, ca și acest dodecaedru, de prin veacul al VI-lea î.e.n. Este surprinzător și faptul că aceste săpături nu au dat la iveală numai dodecaedre regulate, ci și icosaedre sau alte poliedre semiregulate, de tip arhimedian.

— Reținînumirea: *poliedre semiregulate de tip arhimedian*, sper că ai să mi-o lămurești? Și aș vrea să mai știu dacă nu cumva aceste poliedre despre care mi-ai vorbit nu erau folosite ca și zarurile la jocurile de noroc?

— Cu precizie nu se știe, dar se bănuiește că ar fi fost obiecte folosite în jocuri de hazard, exact cum sînt zarurile de azi.

— Dar dacă avem probe că poliedrele regulate au fost cunoscute de etrusci, adică înaintea grecilor, de ce n-am admite că au fost cunoscute încă și mai de mult? Proba materială poate veni ulterior!

— Ba chiar așa este. Omul primitiv a cunoscut poliedrele regulate din natură, prin cristalii diferitelor substanțe. Din începuturi care nu se vor putea nicicînd preciza, el a fost atras și încîntat de forma armonioasă a acestor cristale, iar cu timpul a căutat să le copieze și să le folosească drept obiecte de cult sau de joacă.

— Atunci rămîne doar o legendă că pitagoricienii au descoperit poliedrele regulate?

— Nu! Prin ei aceste corpuri, care pînă atunci erau numai niște *obiecte* destinate uzului practic sau unei plăceri, au devenit *obiecte matematice*. Și asta este echivalent cu o *redescoperire*, căci pitagoricienii, poate cei dintîi, le-au stabilit proprietățile lor geometrice, modul de a le construi și relațiile lor cu alte corpuri geometrice, cum e sfera, de exemplu.

— Te gîndești la proprietatea de a se putea înscrie un poliedru regulat într-o sferă sau de a înscrie o sferă într-un poliedru regulat?

— Da, la această proprietate și la multe altele, pe care le poți găsi fie în cărțile XIII-XV din Euclid, fie în alte tratate de mai tîrziu.

— Asta arată, încă o dată, că nimic nu-i nou sub soare! Că niciodată nu poți afirma cu siguranță că X a descoperit un lucru și nimeni altul dinaintea lui nu l-a cunoscut, nu l-a bănuit sau nu s-a gîndit la el!

— Uite încă un exemplu frumos, din domeniul pe care l-am atacat noi. Vorbeam mai înainte despre poliedrele semiregulate, *descoperite de Arhimede*. Așa se știe, așa sînt numite și deci nu poate fi ceva mai clar decît că aceste corpuri au fost găsite și studiate de Arhimede! Ei bine, știi ce scria Heron din Alexandria, vestitul matematician și mai ales tehnician grec de prin veacul al II e.n. de la care ne-a rămas „Metrica"? În acest tratat, în care se găsesc foarte multe date și probleme de geometrie practică și de tehnică

de calcul, pe care marii geometri ai antichității, cu excepția lui Arhimede, nu le-au considerat vrednice de a fi notate în mod special, Heron scria că „deși Arhimede a descoperit cele 13 poliedre semiregulate, inscriptibile în sferă, Platon a cunoscut de asemenea unul dintre acestea, anume poliedrul cu 14 fețe, dintre care există două tipuri, unul făcut din 8 triunghiuri și 6 pătrate, ale pămîntului și ale aerului, deja cunoscute de cei vechi, celălalt format din 8 pătrate și 6 triunghiuri, care pare să fie mai greu de obținut"!

— Extraordinar! „8 triunghiuri și 6 pătrate, ale pămîntului și ale aerului", adică cubul și octaedrul?

— Nu cubul și octaedrul, ci termenul nou de: *cubooctaedru*, dat acestui nou corp! Pentru cei vechi aceasta era numirea obișnuită, așa cum de pildă azi este pentru tine numirea de cub, de octaedru și așa mai departe! Pentru ei, simbolul se confunda cu însăși denumirea poliedrului respectiv. În loc să-i zică *hexaedru*, sau *cub*, îi ziceau *pămînt*. Interesant este că Heron dă și descrierea acestui poliedru despre care Platon amintea, în dialogul său Meno. Anume el spune cam așa: — „Dacă se înscrie cîte un pătrat în fiecare față pătrată a unui cub, anume unind mijloacele laturilor lui, (fig. 48) se obțin 6 pătrate și, dacă se taie din vîrfurile cubului piramide avînd ca bază triunghiurile astfel formate,

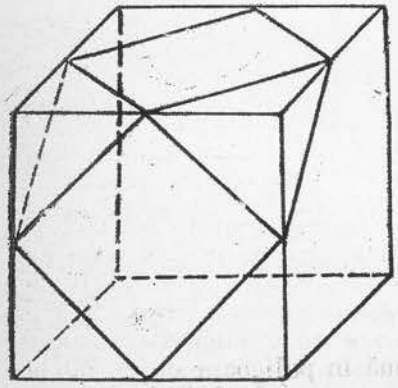


Fig. 48

poliedrul obținut are ca fețe 6 pătrate și 8 triunghiuri echilaterale și se poate înscrie în sferă". — Iată că ai făcut acum cunoștință și cu unul din cele 13 poliedre ale lui Arhimede, pe nume *cubooctaedrul*!

— Mă bucur de cunoștință și doresc să-mi prezinți și duzina care a mai rămas!

— Atunci să începem prin a le defini: *Un poliedru este semiregulat arhimedic, cînd are fețe poligonale regulate și unghiuri poliedre egale între ele.*

— Adică șterg un singur cuvîntel din definiția poliedrelor regulate, acela de *egal*, de la poligoanele lui regulate! E adevărat că înseamnă foarte mult căci, dacă fețele poligonale nu mai sînt egale între ele, pot fi poligoane regulate cu număr diferit de laturi, cum mi-ai arătat că are cubooctaedrul: 6 pătrate și 8 triunghiuri echilaterale. Acuma am să te întreb iar, de ce sînt 13 și nu mai multe? Se poate dovedi că acesta este numărul lor maxim?

— Da. Numai că demonstrația nu-i tot așa de simplă ca aceea pe care ți-am arătat-o atunci, așa că te rog să mă crezi pe cuvînt!

— O fac, deoarece nu ești primul profesor de matematici care recurge la acest ultim argument!

— Cum a ajuns Arhimede însuși la poliedrele care-i poartă numele nu se mai știe, fiindcă și aceasta, ca multe alte lucrări de ale sale, s-a pierdut. Din relatările urmașilor, așa cum ai văzut în descrierea lui Heron, dar mai ales din informațiile pe care ni le transmite Pappus, rezultă că el le-a obținut pe toate prin secționarea poliedrelor regulate. O parte provin numai printr-o simplă tăiere a vîrfurilor acestor poliedre regulate prin plane.

— Așa descrie și Heron formarea cubooctaedrului!

— Da, dar această secționare se poate face în două feluri, fiindcă planul de secțiune poate trece exact prin mijlocul muchiilor care se întîlnesc într-un vîrf, așa cum arată Heron, dar se poate ca planul de secțiune să taie aceste muchii la o distanță de vîrf mai mică decît jumătate. Atunci, fețele poliedrului se transformă în poligoane cu un număr dublu de laturi decît ale poliedrului original. În felul acesta

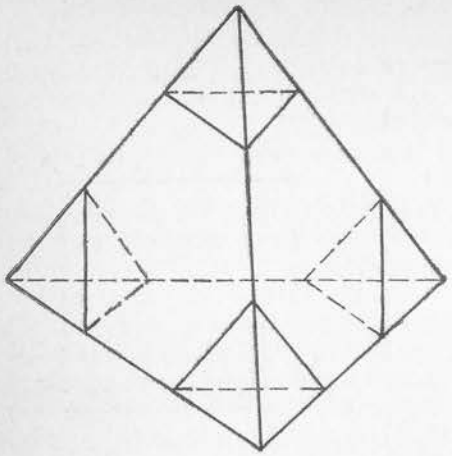


Fig. 49

se obțin următoarele 5 poliedre semiregulate: 1. *tetraedrul trunchiat* (fig. 49): se duc plane paralele cu cele 4 fețe ale tetraedrului, unind punctele de pe muchiile unui unghi poliedru, situate la $\frac{1}{3}$ de vîrf. Corpul obținut are 4 fețe hexagonale regulate și 4 fețe triunghiuri echilaterale, în fiecare vîrf întîlnindu-se două hexagoane și un triunghi echilateral.

— Al doilea, construit la fel, va fi *cubul trunchiat*. Dar de data aceasta cred că nu-i potrivit să împart muchia pătratului în 3 părți egale și să duc planul de secțiune la o treime de vîrf! Octogonul ce se obține trebuie să fie regulat, adică făcînd figura să am (fig. 50):

$$1)\ BC = CE \text{ și deci } BC + 2CD = M$$

$$2)\ \frac{CE}{AF} = \frac{DE}{DF} \quad \text{sau} \quad \frac{CE}{M\sqrt{2}} = \frac{DE}{M} = \frac{CD}{M}$$

De aici se obțin:

$$BC = \frac{M}{1+\sqrt{2}} = M(\sqrt{2}-1) \text{ și } CD = \frac{M(2-\sqrt{2})}{2}.$$

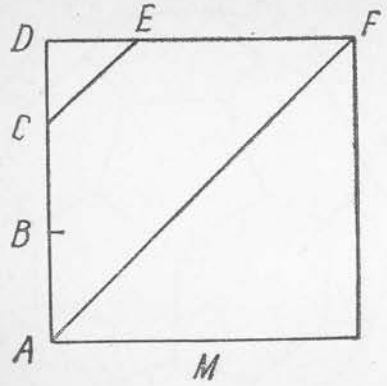


Fig. 50

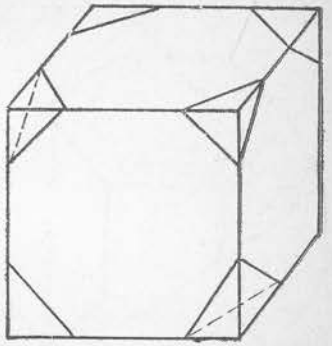


Fig. 51

— Acum, dacă ai găsit ce era mai greu, termină încaltea cu tot. Spune-mi și cîte fețe are? că ce fel sînt am văzut; cîte vîrfuri și cîte muchii?

— Să numărăm: de toate 14 fețe, 8 triunghiulare și 6 octogonale. Vîrfuri? 3 ori 8 egal 24 căci dintr-un vîrf se fac 3. Muchii? rămîn acelea vechi și la acestea se mai adaugă tot 3 ori 8, ale celor 8 tăieturi, în total 36 (fig. 51).

— Să trecem mai departe: al treilea la rînd este *octaedrul trunchiat*. Fețele lui fiind triunghiuri echilaterale, socoteala va fi ca și la tetraedru, adică se împarte muchia în 3 părți egale și secționarea se face la o treime de vîrf. Fețele lui sînt hexagoane: 8 și pătrate: 6, în total 14; vîrfuri a avut 6, de 4 ori fac 24. Muchii a avut 12, acum are în plus 24, așadar 36 de muchii. Figura e cam așa (fig. 52). Lîngă el voi desena și *icosaedrul trunchiat* fiindcă se supune acelorași legi de secționare. Fețele lui sînt pentagoane în număr de 12 și hexagoane 20. Vîrfuri are 60, adică de 5 ori 12, iar muchii: $30 + 60 = 90$ (fig. 53). Al cincilea poliedru arhimedic este *dodecaedrul trunchiat*. Distanța la care trebuie dus planul de secțiune, în așa fel ca decagonul ce se formează să fie regulat, se calculează în mod analog cu acela folosit ca să obținem un octogon regulat din pătrat.

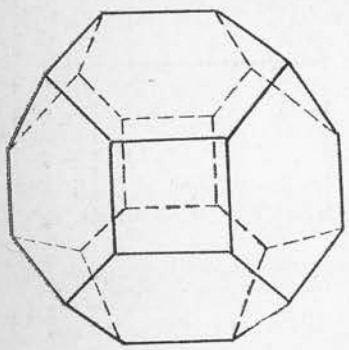


Fig. 52

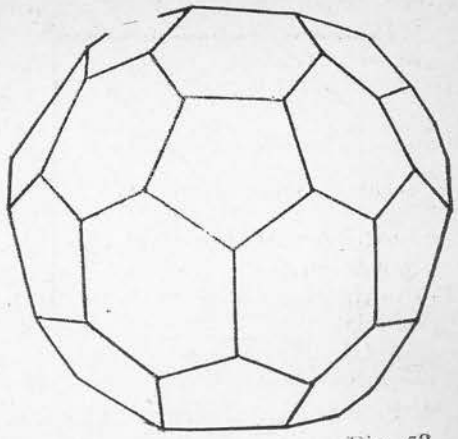


Fig. 53

Fie pentagonul regulat AF (fig.54). Muchia M s-a împărțit prin tăieturile A_0B și CE în așa fel ca BC=CE și BC+2.AB= = M. A doua ecuație din care să se determine AB și CE se

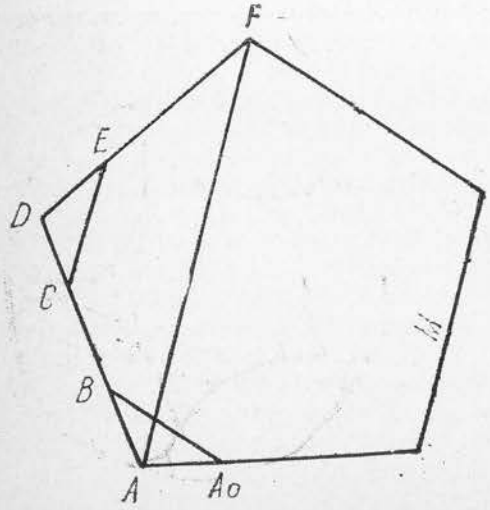


Fig. 54

obține din asemănarea triunghiurilor CDE și ADF. AF = l, fiind latura pentagonului stelat, corespunzător pentagonului de latură M. Valoarea ei se cunoaște, anume — dacă $M = \frac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$, atunci $l = \frac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$, r fiind raza cercului circumscris pentagonului. Înlocuind și făcînd calculele vei obține $CB = CE = \frac{M}{\sqrt{5}}$; și $AB = CD = \frac{M(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{5}}$.

El este format din 12 decagoane provenite din cele 12 pentagoane inițiale, la care se adaugă 20 de triunghiuri echilaterale, așadar 32 de fețe, 60 de vîrfuri și 90 de muchii, (fig. 55).

— Observ că poliedrele semiregulate care corespund la poliedrele regulate conjugate au exact același număr de vîrfuri, fețe și muchii! Dacă mă gîndesc mai bine, lucrul este explicabil căci poliedrele reciproce schimbau între ele numărul vîrfurilor cu al fețelor, ceea ce aici se unifică prin trunchiere. Apoi mă întreb cum ai să procedezi ca să mai obții celelalte 7 poliedre?

— Despre încă unul, e floare la ureche, anume despre *icosododecaedru*.

— Icosododecaedru, spui? Ia să vedem ce-mi arată numirea? Întîi că provine din icosaedru, dar nu-i icosaedrul

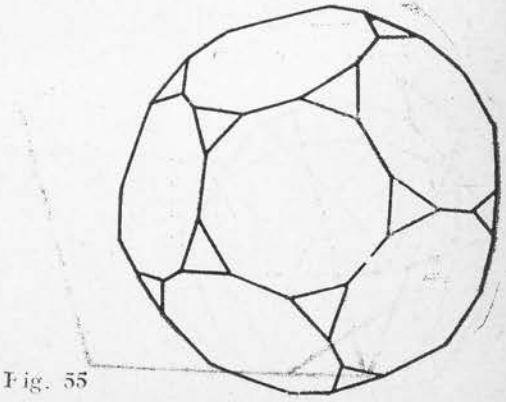


Fig. 55

trunchiat, căci atunci nu ar mai avea nici un sens numirea de dodecaedru. Această numire cere fețe pentagonale alături de altele triunghiulare.

— Judecata ta e dreaptă. Ca să stabilești și metoda, n-ai decît să o aplici pe aceea a trunchierii, prezentată de Heron.

— Așadar secțiunile se fac la jumătatea muchiilor? În adevăr, fiind vorba de fețe triunghiulare, echilaterale, secțiunile acestea conduc la alte fețe triunghiulare regulate și, în același timp, vîrfurile se transformă în pentagoane: 12, cîte vîrfuri are icosaedrul. La acestea se adaugă cele 20 de noi triunghiuri echilaterale, deci în total 32 de fețe și $12 \cdot 5 = 60$ muchii. Vîrfuri pe jumătate, adică 30, căci în fiecare vîrf se întîlnesc cîte două muchii (fig. 56). Așa că, pe suprafața acestui poliedru, alternează 12 pentagoane cu cele 20 de triunghiuri. E singura figură formată din pentagoane și triunghiuri!

— Dacă facem o recapitulare, în privința poligoanelor de pe fețele celor 7 poliedre discutate pînă acum, avem următoarea repartiție de poligoane:

tetraedrul trunchiat:	4 triunghiuri,	4 hexagoane;
cubul trunchiat	8 triunghiuri,	6 octogoane;
cubooctaedrul	8 triunghiuri,	6 pătrate;
octaedrul trunchiat	6 pătrate,	8 hexagoane;
icosaedrul trunchiat	12 pentagoane,	20 hexagoane;
dodecaedrul trunchiat	20 triunghiuri,	12 decagoane, și
icosododecaedrul	20 triunghiuri,	12 pentagoane.

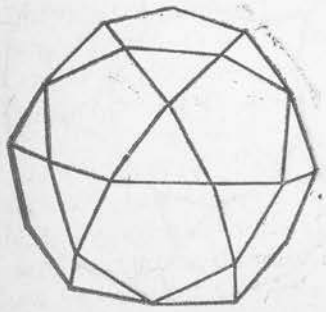


Fig. 56

— După cum văd, fiecare dintre poliedrele lui Arhimede, înșirate aici, se deosebește de oricare altul prin natura celor două serii de poligoane care-i îmbracă suprafața. Dar mai ai șase! Propun numărătoarea inversă, de aici înainte!

— Bine faci, căci și metoda de a le forma este alta. Următoarele 4 se vor obține prin tăierea muchiilor poliedrului respectiv, cu un plan paralel cu muchia care să taie din celelalte muchii părți egale, după care urmează iarăși tăierea vîrfurilor, după unul dintre cele două procedee, despre care am vorbit.

— Procedeu mai complicat decît primul și mă aștept să se formeze chiar mai mult decît două feluri de fețe! Am văzut eu poliedre formate din pătrate, hexagoane și octogoane, pare-mi-se, deși n-aș putea jura că am reținut exact natura acestor poligoane. Oricum, știu bine că erau de trei feluri, dar nu aveam de unde ști, dacă era arhimedic sau altfel!

— Nu pot identifica, pe nevăzute, corpul despre care-mi vorbești, însă observația ta e exactă. Vom întîlni și poliedre cu 3 feluri de fețe. Deocamdată am să-ți prezint *rombocubooctaedrul* care se obține fie prin secționarea cubului, fie prin secționarea poliedrului său reciproc, adică a octaedrului, ambele corpuri avînd același număr de muchii — 12. Secționarea se face prin plane egal înclinate pe cele două fețe ale unghiului diedru, — așadar paralel cu muchia respectivă, ținînd seama ca fețele care rezultă să fie poligoane regulate. În cazul cubului, în locul celor 12 muchii apar 12 pătrate, iar prin intersecția lor, fiecare vîrf al cubului se transformă într-un triunghi echilateral, egal înclinat pe fețele originale ale cubului. Are deci 8 fețe triunghiulare și 18 (12 muchii + 6 fețe) fețe pătrate, în total 21 de fețe, 24 de vîrfuri și 48 de muchii (fig. 57). Următorul...

— Să-ți spun eu, dacă am înțeles procedeul! Se taie muchiile icosaedrului sau ale dodecaedrului cu plane egal înclinate pe cîte două dintre fețele celor 30 de unghiuri diedre. Prin fiecare vîrf al dodecaedrului trec trei muchii, așa

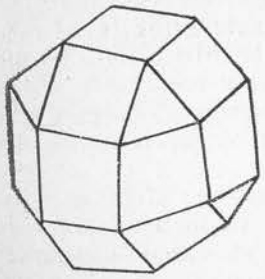


Fig. 57

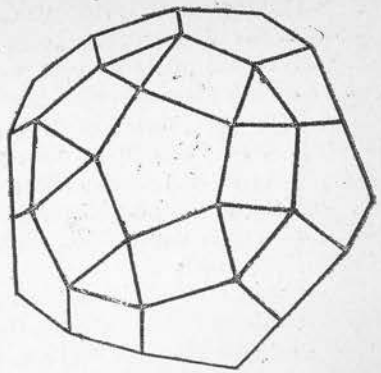


Fig. 58

că aceste trei plane, prin intersecția lor, vor forma un triunghi echilateral. Prevăd că acest poliedru are 20 de fețe de acest fel. Mai departe nu mă duce capul.

— Cred că ai putea merge și mai departe, cu tot atît de mult succes. Dar am să continui eu, mai întîi spunîndu-ți că se cheamă *romboicosododecaedru* și că prin secționarea celor 30 de muchii apar 30 de pătrate. La acestea adaugă și cele 12 pentagoane originale, care s-au micșorat dar nu au dispărut, ca să constați că, în adevăr, acest poliedru are 62 de fețe, unele triunghiuri, altele pătrate și altele pentagoane. Pot să adaug că are 60 de vîrfuri și 120 de muchii (fig. 58).

— Acum sînt curios ce mai tai? că ai cam terminat de cioplit poliedrele regulate!

— Nu te îngriji de asta, mai sînt și dintre acelea semiregulate, care se pot folosi în acest scop. De pildă, cubooctaedrul! În acest caz, se obține *cubooctaedrul trunchiat*. Cele 8 fețe triunghiulare devin, prin tăierea vîrfurilor — un fel mai sugestiv de a-ți înfățișa secționarea de-a lungul muchiei respective — 8 fețe hexagonale, iar celelalte 6 pătrate se schimbă în 6 octogoane. În locul celor 12 vîrfuri

se află 12 pătrate (fig. 59). Așa că el are 26 de fețe, 48 de vîrfuri și 27 de muchii. Mi-a mai rămas un poliedru, acela este *icosododecaedrul trunchiat* și bănuești, cred, că se va obține aplicînd procedeul despre care vorbim, icosododecaedrului.

— Hai să-mi încerc puterile! Din cele 20 de fețe triunghiulare vor ieși 20 de fețe hexagonale, din 12 fețe pentagonale apar 12 fețe decagonale, iar în cele 30 de vîrfuri se ivesc 30 de pătrate de toată frumusețea! Un corp cu 62 de fețe, ca și romboicosododecaedrul, numai că acela are fețe mai simple: triunghiuri, pătrate și pentagoane, pe cînd acesta are ca fețe decagoane, hexagoane și pătrate.

— Unde mai pui că icosododecaedrul trunchiat are cele mai multe muchii și vîrfuri, întrecînd în număr oricare alt poliedru din familia sa, 180 de muchii și 120 de vîrfuri (fig. 60).

— Un adevărat record! Asta însă nu te scutește să-mi spui cum se găsesc ultimele două poliedre semiregulate!

— Știu, dar mă tem că de data aceasta mi se înfundă! Metoda e cu mult mai greu de explicat decît pînă acum, căci intervine nu numai decuparea dar și o rotație a fețelor poliedrului de un anumit unghi. De aceea mă mărginesc să-ți spun cum se cheamă și care le sînt caracteristicile. Res-

Fig. 59

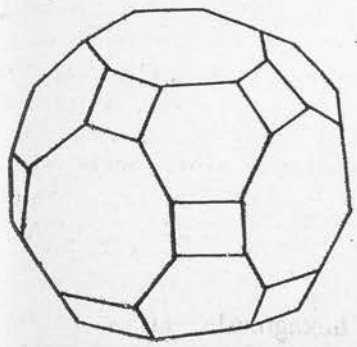


Fig. 60

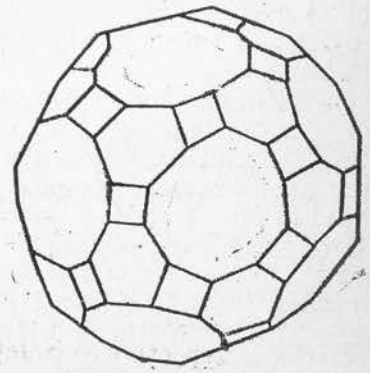
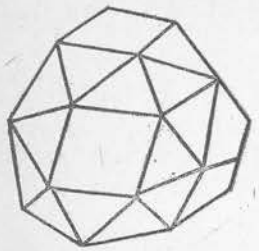


Fig. 61



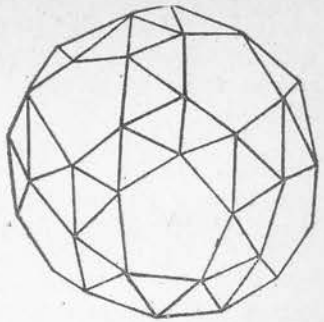


Fig. 62

tul, trebuie să-l afli singur din cărți. E vorba de *cubul teșit*, (fig. 61) care are 38 de fețe, dintre care 32 sînt triunghiuri și 6 pătrate și se obține din cub sau octaedru, și de *dodecaedrul teșit* care are 92 de fețe, 80 fiind triunghiuri și 12 pentagoane (fig. 62).

— Da' vîrfuri și muchii nu au?

— Ba au, tipicarule! Cubul teșit are 24 de vîrfuri și 60 de muchii, iar dodecaedrul teșit are 60 de vîrfuri și 150 de muchii.

— Așa da, încaltea pot face un tablou complet și sistematic cu toate datele mai importante.

— Cred că dacă te-ar auzi Kepler i-ar crește inima de bucurie!

— Dar de ce tocmai Kepler? De ce nu Arhimede sau Pappus?

— Pentru că, așa după cum Pappus a studiat și a scris despre descoperirile lui Arhimede sau și ale altora dinaintea lui, la rîndul său Kepler a urmărit îndeaprope lucrarea despre aceste corpuri compusă de Pappus și a aprofundat-o, dînd la iveală multe și interesante proprietăți noi. Tot în Harmonice Mundi, publicată în 5 volume în anul 1864, se găsesc, anume în volumul doi, toate calculele de care noi nu ne-am încumetat să ne atingem, pentru a se determina mărimea laturilor, înclinarea planelor de secțiune și altele. Cercetările de mai tîrziu, ale lui Euler, Poinsot, Cauchy, Poincaré,

Alexandrov și ale multor alți matematicieni din zilele noastre, au pornit de la lucrările lui Kepler. De altfel, îmi pare rău că trebuie să-ți distrug iluzia că ai un tablou complet al poliedrelor semiregulate arhimedice. La acestea ar trebui să adaugi *prismele arhimedice*, cunoscute de Arhimede și *antiprismele arhimedice* care se pare că au fost descoperite de Kepler.

— O prismă arhimedică trebuie să fie o prismă cu bazele poligoane regulate și cu fețe laterale pătrate, cred eu, dar antiprisme?

— Definiția prismelor arhimedice este bună, cît privește antiprismele, ele au oarecare legătură cu ultimele dintre cele două poliedre semiregulate prin aceea că și aici intervine rotația ca element de formare a corpului. Consideră cele două baze ale unei prisme arhimedice. Ele sînt două poligoane regulate și egale, cu planele lor paralele, cu centrele lor situate pe perpendiculara comună celor două plane, trecînd prin aceste două centre. Acum, presupune că unul dintre poligoanele de bază îl rotesc în jurul centrului său cu un unghi egal cu $\frac{180^\circ}{n}$, n fiind numărul laturilor poligonului și apoi unesc vîrfurile astfel ca fețele laterale să fie triunghiuri echilaterale, una dintre laturi fiind o muchie a bazei.

Uite, desenez aici o prismă arhimedică pătrată și o antiprismă pătrată (fig. 63 și 64). Kepler a mai arătat și că orice poliedru semiregulat arhimedic se poate înscrie într-o

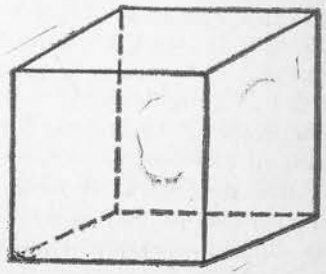


Fig. 63

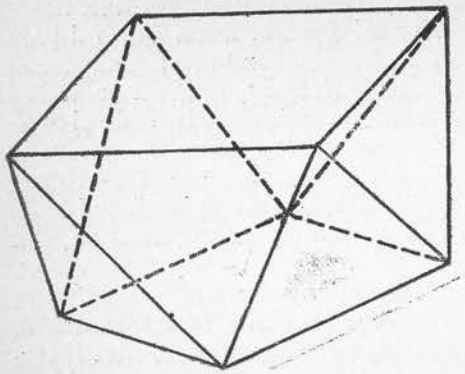


Fig. 64

sferă concentrică sferei circumscrise poliedrului regulat, corespunzător lui.

— Fiindcă a venit iar vorba de poliedrele regulate și de Kepler, mă întreb ce s-ar fi întîmplat cu corespondența dintre aceste poliedre regulate și planetele sistemului solar, dacă el ar fi știut despre existența celorlalte trei planete descoperite ulterior: Uranus, Neptun și Pluton, precum și a micilor planete. Oare corespondența lui mai rămînea valabilă?

— După ce toate planetele au fost descoperite, adică după 1930, căci acesta este anul în care a fost fotografiată planeta Pluton, s-a găsit un alt pătimaș îndrăgostit de poliedre, de planete și mai ales de Harmonice Mundi a lui Kepler, care s-a hotărît să ducă mai departe ideile lui Kepler, de acolo de unde le lăsase acesta. De fapt, am motive să cred că el a început să lucreze în această direcție de prin 1915, fiindcă tabelele astronomice pe care le folosește drept termen de comparație sînt publicate de Observatorul din Paris în 1915. De ce le-ar fi luat pe acestea și nu altele mai noi, dacă ar fi început cercetările mai tîrziu? Oricum, Francis Warrain moare în 1940 și lasă manuscrisul gata pentru imprimat prietenului său B. Montrieux, un bun cunoscător al ideilor lui Warrain. Acesta l-a publicat în 1942, supraveghind corecturile, sub titlul „Essai sur l'Harmonices Mundi

ou Musique du Monde de J. Kepler, par Francis Warrain"[1]. Warrain a studiat întîi, bine de tot, cele 5 volume din Harmonice, lucru foarte greu pentru cei din zilele noastre nu numai fiindcă se cere o serioasă pregătire în privința limbii latine, dar fiindcă și cu totul altul este modul de gîndire actual.

— Cred și eu! Kepler nu cunoștea legea gravitației a lui Newton, dacă ar fi știut-o, probabil că nu ar mai fi încercat să dovedească armonia sistemului planetar pe baza proprietăților ce leagă poliedrele regulate între ele! Să piardă ani de zile cu asemenea calcule!

— Vezi, aici te înșeli! Francis Warrain a continuat aceste calcule, și numai dacă deschizi cele două volume și le răsfoiești poți să-ți dai seama cîți ani de muncă sînt condensați în tabelele pe care le întîlnești înșirate pe foi de-a rîndul. El a vrut să dovedească că armonia care dăinuiește în sistemul solar, prevăzută și găsită de Kepler numai pentru vechile planete, continuă să se exprime prin același limbaj al corespondenței cu poliedrele regulate, și se aplică la întregul cortegiu planetar, incluzînd și planetele mici, dacă la poliedrele convexe regulate se mai adaugă și poliedrele stelate regulate!

— Va să zică dintre aceștia îmi ești matale! Nici un cuvînt despre *poliedrele stelate* și acuma, hop! poliedrele stelate! Te rog să-mi spui tot ce știi despre ele!

— Cînd? Acum la miezul nopții? Lasă pe altădată!

— Nici nu mă gîndesc! Parcă numai o dată ne-au prins zorile discutînd! Facem o pauză, pînă mă duc să mai cotrobăiesc prin cămară și frigider și pe urmă facem praf și poliedrele cele stelate! Se poate să-mi faci tu, mie, una ca asta?

— În mare încurcătură mai poate intra omul cu tine, a început prietenul meu cînd am reluat discuția. Ar fi fost posibil să nu știu nimic despre poliedrele stelate.

— Taci, bădie, că asta nu se poate. Nu știu eu ce faci toată ziua, mai ales de cînd ai ieșit la pensie? Tot sfredelești

[1] Actualités sci. et ind., Paris, 1942, nr. 912, T. 1–2.

în minte toate problemele și fuga la caietele cu însemnări și la cărți, ca să le pui la punct, mai dihai decît atunci cînd ți-ar fi trebuit toate acestea, ca să le spui elevilor răsăriți! Și dacă nu găsești ce-ți trebuie, repede pui nota pe hîrtie și cînd se umple pagina, trenul și la Iași! Numai noaptea te mai prind acasă sau duminicile, altfel stai lipcă la Seminarul Matematic, de am ajuns să cred că de vină ar mai fi și domnișoara bibliotecară, pe care prea mult mi-o lauzi pentru amabilitate și competență!

— Lasă gluma deoparte, căci numai datorită ei pot să-ți spun în adevăr cîte ceva și despre poligoanele stelate. Știi ce carte frumoasă mi-a dat cînd i-am spus că aș vrea să citesc ceva mai nou despre poliedre? O carte care a apărut acum 20 de ani, scrisă de H.S. Coxeter, care se cheamă „Regular polytopes".

— Polytop? Dar ce are asta cu poliedrele?

— Vezi, asta m-am întrebat și eu în gînd, cînd mi s-a dat cartea. Noroc că n-am întrebat ca tine! Citind am aflat că acest termen a fost introdus încă din 1882 de către Hoppe, ca un nume general pentru o figură geometrică mărginită de segmente de dreaptă, de plane sau de hiperplane. Așadar, un politop în două dimensiuni este un poligon, în trei un poliedru și, în spațiul cu mai multe dimensiuni: politop! Nu-ți pot spune ce bucurie mi-a adus această carte și... habar n-aș fi avut de existența ei dacă nu aș fi avut norocul de a mi-o fi dat această admirabilă bibliotecară! Așa că te rog să nu o atingi nici cu o floare, nu cu o glumă! Ți-am dat ca exemplu o singură carte, despre care sper că am să-ți mai vorbesc înainte de plecare. Ea mi-a mai dat și altele, nu-i cazul să ți le înșir pe toate! Ca să-ți vorbesc despre *poliedrele regulate stelate*, trebuie să încep cu *poligoanele regulate stelate*, dintre care ți-e bine cunoscută pentagrama!

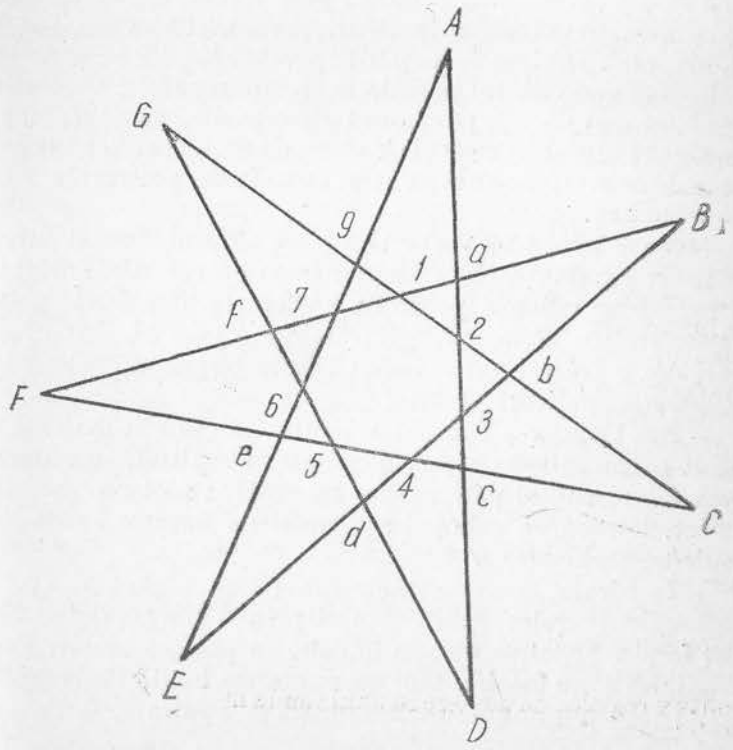
— Cum să nu! Odinioară semnul pitagoricienilor; azi împodobește stema țării noastre!

— Lăsînd la o parte triunghiul și pătratul, orice poligon convex regulat dă naștere la unul sau la mai multe poligoane stelate regulate.

— Mai multe, spui?

— Nu totdeauna. În cazul pentagonului sau a octogonului, nu se obține decît cîte un poligon stelat, dar în cazul heptagonului, de pildă, se obțin două poligoane stelate. Ca să te conving, hai să desenăm un heptagon (fig. 65) și să unim prelungirea laturilor, din 3 în 3, adică aceea care pornește din vîrful 1, cu aceea din vîrful 4, se obține astfel poligonul stelat ABCDEFG, dar, totodată și poligonul stelat, tot regulat, abcdefg, prin unirea prelungirilor laturilor din 2 în 2, adică aceea din vîrful 1 cu aceea din vîrful 3 etc.

Fig. 65



În același timp, prin unirea vîrfurilor ABCDEFG sau a vîrfurilor abcdefg se obțin alte două heptagoane, concentrice cu primul, și acestea tot regulate. Dar se mai poate obține un poligon stelat regulat dintr-un poligon regulat convex și altfel, anume: să se ducă diagonalele lui, ceea ce înseamnă să se unească în toate modurile posibile vîrfurile lui. În primul caz se zice că poligonul convex generator este *învelit* de poligonul sau de poligoanele stelate formate, în al doilea caz că el *le învelește*.

Exact la fel se întîmplă și cu poliedrele convexe regulate. Din ele se pot construi poliedre stelate regulate, fie unind, în toate modurile posibile, vîrfurile poliedrului convex respectiv — adică tăindu-l prin fețele diagonale care rezultă —, fie prelungind muchiile, sau, mai bine zis, fețele poliedrului. Deși nu le-a stabilit teoria, Kepler a cunoscut cel puțin două dintre poliedrele stelate regulate. Celelalte două au fost descoperite, sau redescoperite, nu știu bine, de către Poinsot în 1809 și de aceea de multe ori vei întîlni poliedrele regulate stelate sub numele de poliedrele Kepler-Poinsot.

— După felul cum vorbești înțeleg că sînt numai patru poliedre regulate stelate. De ce numai patru? Mi-ai arătat, doar, că un poligon poate da naștere la mai multe poligoane stelate. Prin analogie, ținînd seamă că sînt cinci poliedre regulate, mi se pare că ar trebui să mă aștept la mai multe poliedre stelate!

— Nu, Cauchy a dovedit primul că nu pot fi mai mult decît patru poliedre regulate stelate. De altfel, așa după cum triunghiul și pătratul nu au generat nici un poligon stelat, tetraedrul, cubul și octogonul nu formează nici ele poliedre stelate!

— În adevăr, dacă mă gîndesc mai bine, văd că nici prin prelungirea fețelor opuse și nici prin a diagonalelor nu pot forma, la tetraedru sau la cub, un poligon stelat. Dar la octaedru nu înțeleg de ce nu s-ar forma unul? Prelungind cîte 3 din fețele opuse care înconjoară pe a patra se formează

8 unghiuri triedre, lipite de cele 8 fețe ale octaedrului! Nu este acesta un poliedru regulat stelat?

— Nu, din același motiv pentru care nici hexagonul nu formează un poligon stelat!

— De unde mai vine și asta? Cînd n-ai amintit hexagonul, am crezut că o faci din prescurtare, fiind de la sine înțeles că între pentagon și octogon se află hexagonul. Eu îți pot dovedi că din hexagon se formează un foarte bine cunoscut poligon stelat, anume pecetea lui Solomon (fig. 66).

— Îmi pare foarte rău că-ți produc o deziluzie, dar această figură nu este decît *în aparență* un poligon stelat! În realitate sînt două triunghiuri suprapuse: triunghiul ABC și triunghiul DEF.

— Și din această cauză nu se socotește poligon stelat?

— Bineînțeles, fiindcă figura aceasta nu se obține printr-o trăsătură continuă a conturului său, așa cum desenezi un triunghi, sau pentagrama. Același lucru se întîmplă și cu poliedrul despre care mi-ai vorbit, el este cunoscut sub

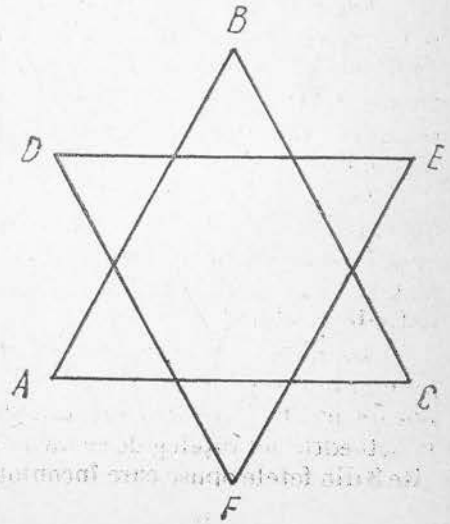


Fig. 66

numele de steaua octogonală, însă nu-i un poliedru stelat, ci o înlănțuire de două tetraedre!

— Niciodată n-am bănuit că poliedrele pot închide în ele atîtea taine!

— Stai că taina tainelor încă nu ți-am descoperit-o. Păstrează-ți uimirea, ca să o ai intactă pentru clipa aceea! După cum vezi, nu ți-a mai rămas, ca materie primă pentru poliedrele stelate decît dodecaedrul și reciprocul lui: icosaedrul!

— Atunci să consider dodecaedrul. Dacă prelungesc muchiile fiecăreia dintre cele 12 fețe obțin întîi din fiecare față cîte un pentagon stelat, cu colțurile în afara dodecaedrului. Însă cîte 5 dintre aceste colțuri se unesc formînd un unghi poliedru pentagonal regulat.

— Foarte adevărat! Acesta este *micul dodecaedru stelat* (fig. 67); se mai numește și *dodecaedrul de specia a treia cu*

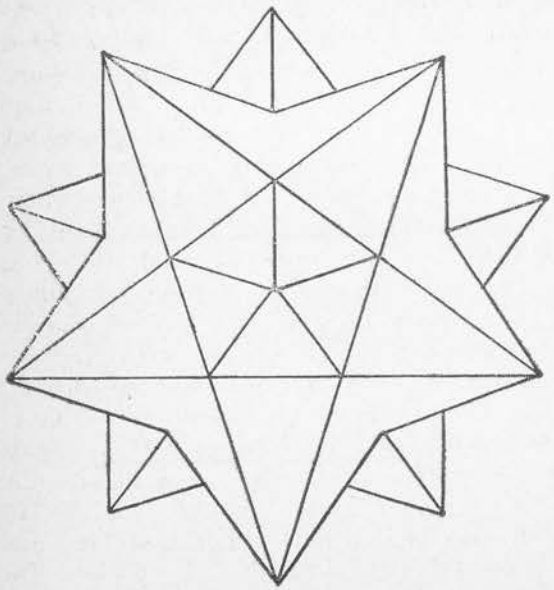


Fig. 67

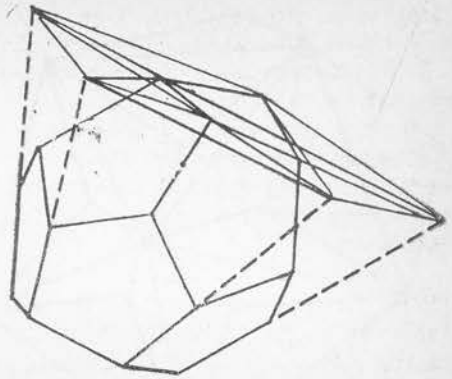


Fig. 68

fețe stelate. După cum singur ai spus, are 12 fețe diagonale stelate care se întîlnesc cîte 5 în fiecare vîrf. Are 12 vîrfuri și 30 de muchii. S-ar fi putut proceda însă și altfel. Anume să se fi prelungit fiecare dintre fețele plane ale dodecaedrului pînă ce întîlnea cele 5 fețe situate pe emisfera opusă feței respective (fig. 68). În acest caz se obținea un alt dodecaedru stelat, tot cu 12 vîrfuri dar cu unghiurile poliedrale stelate. Numărul fețelor rămîne tot 12 și al muchiilor 30, dar, față de primul dodecaedru stelat, acesta apare ca reciprocul lui, căci acesta are unghiuri poliedrale stelate și fețe pentagonale convexe, iar primul are fețele pentagonale stelate și vîrfurile poliedrale convexe. El se numește *marele dodecaedru* sau *dodecaedru de specia a treia cu fețe convexe* (fig. 69). Dacă se prelungesc muchiile dodecaedrului de specia a 3-a cu fețe convexe (fig. 70) se obține un nou dodecaedru, *marele dodecaedru stelat* sau *dodecaedrul de specia a 7-a*, care are 20 de vîrfuri, avînd cîte 3 pentagoane stelate în fiecare vîrf, numărul fețelor lui fiind tot 12 iar muchii 30 (fig. 71). În fine, ultimul poliedru stelat, care se numește *marele icosaedru* sau *icosaedrul de specia a 7-a*

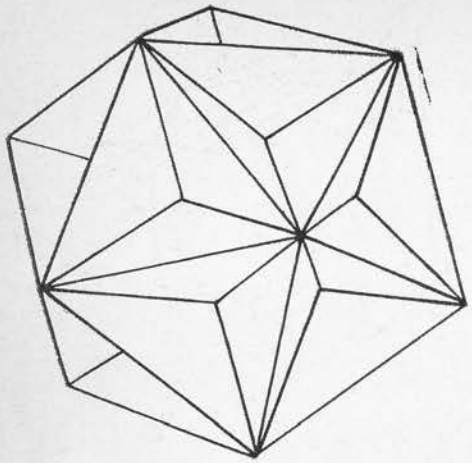
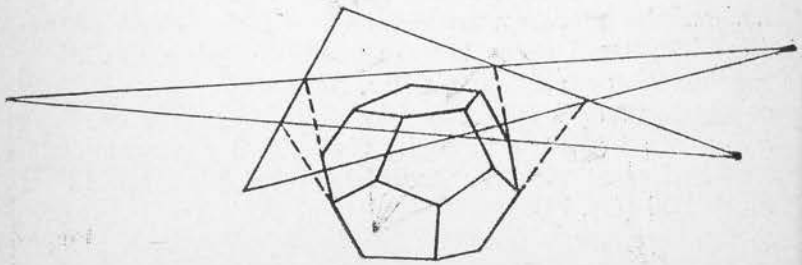


Fig. 69

(fig. 72), are 12 vîrfuri, formînd fiecare cîte un unghi pentagonal stelat din 12 fețe triunghiulare în număr de 20. Muchii are tot 30 ca și reciprocul lui, marele dodecaedru stelat, cu care alternează în numărul vîrfurilor și al fețelor. El se obține din icosaedru prelungind o față a lui, considerată ca bază, pînă se întîlnește cu prelungirile celor 3 fețe care înconjoară fața opusă acesteia.

— Și cu asta, basta! Înseamnă că ai încheiat povestea poliedrelor regulate, toate, atît convexe cît și stelate.

Fig. 70



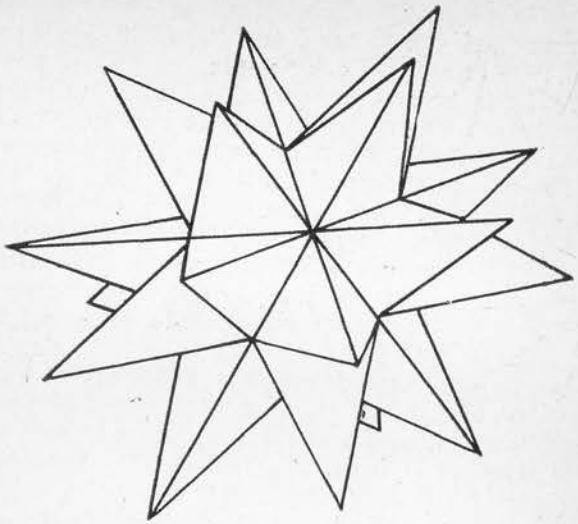


Fig. 71

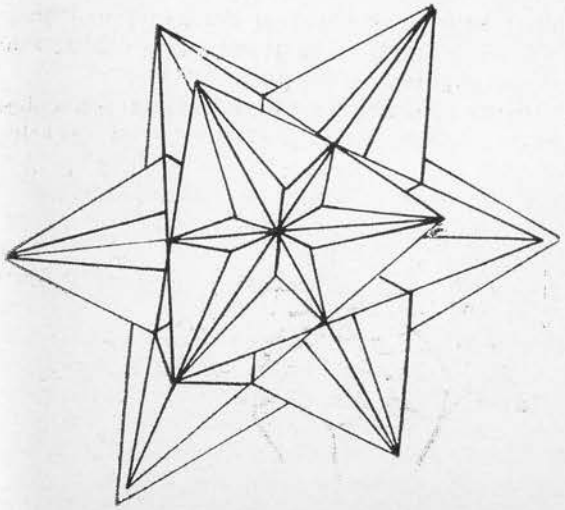


Fig. 72

Drept să-ți spun eu am totuși impresia că ceva nu s-a terminat! Ce anume nu știu, pentru că nu aș putea spune că nu mi-a fost clar — urmărind modul de generare al poliedrelor stelate, să înțeleg că cele trei dodecaedre nu pot avea mai mult decît 12 fețe pentagonale, după cum nici marele icosaedru nu are mai mult de 20 de fețe triunghiulare.

— Desigur! Cum ar putea avea mai multe sau altfel decît fețe triunghiulare, dacă fețele marelui icosaedru s-au format prelungind o față a icosaedrului convex și intersectînd-o cu alte trei fețe opuse? Icosaedrul convex are 20 de fețe și prin această operație nu se construiesc decît alte 20 de fețe noi.

— Sînt cu totul de părerea ta, dar spune-mi te rog, pentru cineva care nu ar ști toate acestea și s-ar uita la oricare dintre aceste figuri, hai să zicem la marele dodecaedru stelat, și ar fi întrebat cîte fețe are, ce ar răspunde? 12, sau ar zice — foarte multe, 60?

— Aceasta ți-e deci nedumerirea? Atunci același lucru i s-ar putea întîmpla și dacă ar privi o figură mai simplă, de pildă chiar pentagrama. Ar putea afirma că ea e formată nu din 5, ci din 10 sau chiar din 15 laturi, socotind drept laturi cele 10 segmente care formează colțurile și adăugînd în plus și celelalte 5 segmente interioare. Știi de unde provine această iluzie? Să-i zicem „optică" deși termenul nu-i bine ales. L-am spus pe acesta ca să nu-l folosesc pe acela de „ignoranță".

— Am să-ți răspund, ca să nu mă crezi ignorant! Din faptul că nu se ține seamă, la prima vedere, de deosebirea care există între poligoanele, respectiv poliedrele, convexe și cele concave.

— Exact asta-i. Numai un poligon, respectiv poliedru, *convex* formează o singură linie — sau suprafață — *închisă*, care descompune planul, respectiv spațiul, în *două regiuni distincte*: una *interioară* finită și cealaltă exterioară infinită. În felul acesta, nici una dintre liniile, respectiv planele, care mărginesc poligonul, respectiv poliedrul, nu pătrund în interiorul figurii, fie ea plană sau spațială. Însă aceasta nu se întîmplă la poligoanele sau poliedrele concave, din

care fac parte și cele stelate. În acest caz, cum ar fi la pentagonul stelat, una dintre laturile lui pătrunde în interiorul pentagonului, tăindu-l și dînd, prin aceasta, impresia că, în locul unei singure laturi, sau fețe dacă ar fi vorba de poliedru, sînt mai multe. Ești satisfăcut de această punere la punct?

— Chiar dacă aș fi, încă mai există *ceva* care mă roade. De data aceasta însă nu mai poate fi vorba de *aparențe*, și nu știu cum am să o mai scot la capăt! Am impresia că cele 9 poliedre regulate sînt dominate sau, mai degrabă tiranizate, de șirul numerelor:

4 , 6 , 8 , 12 și 20 !

Uită-te și tu, dacă le pun toate poliedrele pe rînd:

	Tetr.	*Cub.*	*Oct.*	*Dodec.*	*Icos.*	*Dod. 3st.*	*Dod. 3con.*	*Dod.7*	*Icos. st.*
Fețe:	4	6	8	12	20	12	12	12	20
Vîrfuri:	4	8	6	20	12	12	12	20	12

— Ei bine, dragul meu prieten, află că aici ai pus degetul pe rană! La acest lucru m-am referit eu, mai înainte, cînd te-am sfătuit să-ți păstrezi uimirea pentru cele ce vei vedea mai tîrziu! Află că nu ești singurul om care și-a pus această întrebare. A adresat-o, în 1809, chiar Poinsot, Academiei de Științe din Paris care pune imediat la concurs tema perfecționării teoriei poliedrelor. Ea se află, de altfel, și în articolul lui Poinsot despre *poligoane și poliedre*, apărut în 1810 în Journal de l'Ecole Polytechnique, unde stabilește, pentru prima oară în mod riguros, existența celor 4 poliedre regulate stelate, sub forma directă a întrebării: „Nu-i posibil să existe poliedre regulate, în care numărul fețelor să nu fie egal cu numerele 4, 6, 8, 12 și 20?"

— Îmi închipui cît de mult mi-au crescut acțiunile în ochii tăi, cu această întrebare! Mîndru de isprava mea, aștept să-mi spui ce a urmat.

— La mine acasă, acuș trebuie să cînte cocoșii de ziuă, așa că la o asemenea oră mică n-am de gînd să-ți fac un compliment mare. Află că primul răspuns a fost dat, după

aproape doi ani, de către Augustin Cauchy. Cred că el ar fi răspuns și mai repede, dacă ar fi fost vremurile normale, dar era în 1811, pe cînd Napoleon visa încă la cuceririle ce avea să le facă! Cauchy terminase Școala Politehnică cu un an mai devreme și fusese trimis la Cherbourg ca să lucreze la întăriturile militare. Înainte de plecare, Lagrange, care era prieten cu tatăl lui, i-a atras atenția asupra acestei probleme iar el a rezolvat-o, folosind numai orele libere. Răspunsul lui a fost negativ, adică a stabilit că în afară de cele nouă poliedre regulate nu mai există altele. Pentru aceasta Cauchy a stabilit mai întîi una dintre cele mai frumoase teoreme referitoare la poliedrele convexe, anume:

„Două poliedre convexe care au fețele respectiv egale și la fel dispuse sînt egale sau simetrice". Bineînțeles că această teoremă nu se aplică la poliedrele concave, după cum nici teorema corespunzătoare din plan:

„Două triunghiuri sînt egale dacă au laturile respectiv egale" nu se aplică la poligoane cu mai mult decît trei laturi!

— Așadar această teoremă ar fi o generalizare pentru cazul poliedrelor convexe, a teoremei despre egalitatea triunghiurilor?

— Da, și tocmai în această generalizare, aproape de neașteptat, constă toată frumusețea ei. Astfel Cauchy a putut stabili că nu există alte poliedre regulate convexe decît cele cinci despre care am vorbit și apoi a arătat prin alte moduri de generare ale celor patru poliedre stelate că ele sînt singurele posibile. Raportorii acestui memoriu prezentat Academiei au fost Legendre și Malus, cel care, printre altele, a descoperit polarizarea luminii prin reflexie. Se spune că Legendre a fost entuziasmat de aceste rezultate și l-a încurajat pe Cauchy să continue cercetările, pe cînd Malus s-a arătat mai puțin încîntat de faptul că demonstrațiile lui Cauchy nu aveau caracterul afirmativ al demonstrației directe, ci acela ce rezultă prin metoda indirectă a reducerii la absurd! Acestei obiecții Cauchy nu-i putea da nici un răspuns, și, poate din această cauză, deși demonstrațiile lui sînt impecabile, problema a fost reluată peste

vreo 45 de ani și de alți matematicieni iluștri ca J. Bertrand și A. Cayley.

În cartea lui Coxeter despre care ți-am vorbit se găsesc nu mai puțin decît trei demonstrații diferite ale acestei teoreme care limitează numărul poliedrelor regulate la 9 și îmi pare rău că nu putem aborda nici una cum trebuie, fiindcă în fiecare dintre ele e nevoie să introduc o noțiune nouă care cere poate o pregătire mai specială.

— Despre aceasta nu-ți face nici o grijă. Sînt convins că cei „Trei mari" nu s-au înșelat! Din contra, demonstrația lor mă uimește și mă face să mă cutremur în fața faptului că, din miliarde și miliarde de poliedre, cîte mintea mea nu le poate cuprinde, să se aleagă deoparte *numai 9*, atîtea: *nouă*, care să fie regulate fiindcă ascultă de legea care le cere *ca numărul fețelor lor* să nu fie altul decît unul dintre numerele 4, 6, 8, 12, 20!

— Ba să mai fie și poligoane regulate și egale!

— Asta e de la sine înțeles. Dar fiind poligoane regulate și egale, ele nu se pot grupa decît după legea acestor 5 numere, ca să formeze poliedre regulate! E fantastic!

— De ce? Dacă vrei să fii poliedru regulat, n-ai decît să te supui legii, dacă nu, rămîi un poliedru oarecare! Nu crezi că unui asemenea poliedru i s-ar putea spune, ca și lui Hyperion:

„Tu ești din forma cea dintăi,
Ești veșnică minune"?

NOȚUNEA DE GRUP

sau

Unde dai și unde crapă

— Ghici cu cine m-am întîlnit, nas în nas, cînd urcam spre casă? m-a întrebat prietenul meu, Teodor Solonar, după ce ne-am sculat de la masă.

— Știu eu? I-am răspuns, vreun prieten din vremea studenției, vreo altă cunoștință de mai tîrziu?

— N-ai ghicit! Cu nepotul tău, Nucu!

— Nu-mi vine să cred că bucuria care-ți strălucește în ochi ar avea drept cauză întîlnirea...

— Ba are! Nici nu-ți închipui în ce încurcătură m-a putut pune hoțomanul!

— Iar exagerezi! De cînd l-ai văzut lucrînd la mașina electronică, te-a îmbrobodit cu totul. Nu-l mai vezi decît inventator, savant, ba poate chiar filozof!

— Și sînt sigur că se va alege ceva bun de capul lui, dar ce să mai întindem vorba, că doar nimeni nu-i profet în satul lui! Uită-te acum: venea băiatul flămînd și obosit după 8 ore de muncă și cînd m-a văzut, despre ce crezi că mi-a vorbit?

— Despre mașina de calcul!

— Da' de unde! Mi-a spus: ce bine-mi pare că vă întîlnesc, domnule Solonar. Dv. mă veți scoate dintr-o grea încurcătură! Care? l-am întrebat eu. Dumneavoastră singur îmi puteți spune de unde vine cuvîntul *matematică*. Cînd mi-a

venit acest gînd, alaltăieri, mi-am închipuit, a continuat tot el, că răspunsul e un fleac și am căutat întîi cuvîntul în Dicționarul limbii române moderne. Acolo însă am găsit: „Știință care se ocupă cu studiul mărimilor, al relațiilor cantitative și al formelor spațiale." Fr. Mathématique și într-o paranteză indicația (gr) adică de origine greacă! Să nu-ți fie mai mare ciuda! Adică trebuia să-mi spuie cum e în franțuzește sau să-mi arate originea? Nu vi se pare că această comoditate a d-lui autor este o lipsă completă de considerație față de cititor? Știu că „aritmetica" vine de la „arithmetichi" care înseamnă „teoria numerelor", că „geometria" vine de la „geo"=pămînt și „metreo"=măsor, că „logistichi" înseamnă „arta de a calcula" fiindcă la greci era foarte netă deosebirea dintre aritmetica teoretică și cea practică, dar matematica? Nu știu de unde vine și, în toate cărțile mele, nu l-am găsit! Mă hotărîsem să trec pe la dv. dar n-am mai avut cînd. Vezi, i-am răspuns eu, matematica este în adevăr un cuvînt grecesc „mathimata" și înseamnă „obiect de instrucție sau de învățămînt". Așadar, la început, el nu a avut sensul pe care-l are azi, ci prin *mathimata* se înțelegea un grup întreg de obiecte care formau atunci baza științifică a învățămîntului superior! Foarte interesant, mi-a răspuns Nucu, atunci vă rog să-mi spuneți cînd și cum s-a petrecut această schimbare de sens?

— Ei și acum de ce te-ai oprit? l-am întrebat eu, continuînd. Și mai ales, de ce-ți sclipesc iar ochii? Ce s-a întîmplat după ce i-ai explicat cum s-a produs transformarea? De ce taci și rîzi? Ce i-ai spus, de ți-a dat atîta satisfacție?

— Cît de puțin te mai pricepi tu la oameni! La ce m-aș mai mira că nu-l înțelegi nici pe nepotul tău! Măi omule, eu acuma nu-s deloc satisfăcut, fiindcă nu i-am putut răspunde nimic băiatului, dar sînt foarte bucuros, întîi că pe el îl preocupă asemenea probleme și al doilea că a avut ocazia să mă prindă nepregătit. Trebuie să se învețe și cu asta!

— Adică, vrei să mă faci să cred că n-ai știut ce să-i răspunzi?

— Sigur! N-am știut. Este un lucru la care nu m-am gîndit niciciînd și tocmai de aceea mi-a și făcut atîta plăcere întrebarea lui! Sînt sigur că tu l-ai putea lămuri pe deplin și i-am spus-o. Așa că zilele acestea te va vizita. Îmi pare rău că mi-am luat bilet pe mîine dimineață și că nu pot amîna plecarea, că mi-ar fi plăcut să mai stăm împreună la taifas. Însă azi după amiază sper să o lămurim noi doi de-a fir-a-păr și, cu această ocazie, am să-mi mai plătesc și unele datorii mai vechi.

— Bine, primesc învoiala, fiindcă aceste lucruri m-au interesat și am citit despre ele cîte ceva. De altfel, am continuat, ai spus foarte corect că la început, adică pe vremea pitagoricienilor, cuvîntul *mathimata* avea un înțeles mult mai larg. Unii cercetători afirmă că elevii din școala lui Pitagora, care primeau învățătura esoterică, dezvăluindu-li-se întreaga filozofie cu toate amănuntele și secretele ei, erau numiți *matematicoi*, așadar sensul cuvîntului de *matematician* era pe atunci de *învățat*, sau de *savant*. Spre deosebire, ceilalți elevi care urmau învățămîntul exoteric, adică cel elementar, se numeau *acusmaticoi* adică *auditori*. Nici pe vremea lui Platon, cuvîntul nu avea sensul actual. În *Republica*, el întreabă, de pildă: „Care este cel mai important *Mathimata*?" și răspunde: „Cel mai importnat *mathimata* este ideea de bine". Vezi dar că termenul era folosit cu înțeles de „obiect de studiu". În alt loc însă, vorbind despre legi, el discută despre *tria mathimata* referindu-se la următoarele *trei obiecte de studii*: aritmetica, geometria și astronomia. După cum știi bine, atît la pitagoricieni, cît și în școala lui Platon, subiectele matematice aveau întîietate și de aceea apărea ca normal să se folosească, tot mai des, termenul de mathimata atunci cînd era vorba să se exprime, într-un singur cuvînt, obiectele: aritmetica, geometria și astronomia. În această privință, a rămas mărturie un fragment dintr-un manuscris al matematicianului Architas din Tarent, cunoscut pitagorician și bun prieten al lui Platon. „Matematicienii îmi pare că au ajuns la cunoștințe corecte și de aceea nu e de mirare că au o concepție adevărată despre natura oricărui lucru în parte... Astfel ei au o cunoaș-

tere clară despre viteza stelelor, răsăritul și apusul lor, despre geometrie, aritmetică și sferică[1] și nu mai puțin despre muzică[2]. Aceste mathimata par să fie înfrățite căci se ocupă cu cele două forme gemene ale existentului..." Începînd cu Aristotel cuvîntul mathimata capătă înțelesul de azi. De vrei să te convingi, am să-ți citesc cîteva fraze din Metafizică și apoi din Fizică. Din Metafizică: „Așa numiții pitagoricieni s-au ocupat cu matematica și ei au fost primii care au promovat-o. Și fiindcă se ocupau așa de mult de ea, au crezut că bazele ei ar coincide cu fundamentele lucrurilor în genere. Deoarece în matematică numerele ocupă primul loc, ei credeau că recunosc în numere analogii pentru toate lucrurile existente..." În Fizică la fel: „După ce am stabilit în cîte sensuri se spune «natură» trebuie să vedem acum prin ce se deosebește matematicianul de fizician; căci corpurile fizice au suprafețe, volume, lungimi și puncte, lucruri pe care le studiază matematicianul..."

— Așadar, Aristotel, deși nu a fost matematician, a avut viziunea sau intuiția acestei științe în devenire, cuprinzînd *într-un singur cuvînt* trei discipline, pe atunci *complet diferite* una de alta? Ba, aș adăuga că prin descoperirea mărimilor irațională nici nu se vedea posibilitatea vreunei eventuale legături între aritmetică, știința numerelor (întregi), adică a discretului și geometria, știința întinderilor spațiale, adică a conținutului!

— Te întreb acuma, așa și eu ca prostul, am spus eu, dacă nu cumva sudura a rămas numai în cuvînt? Fiindcă mi s-a întîmplat să citesc sau să aud întrebarea: *matematică* sau *matematici*? Cu alte cuvinte, există un organism *unic*, viguros închegat, caracterizat printr-un obiect, și o metodă unică, care-și găsește diferite moduri de exprimare sau există un *conglomerat* de mai multe discipline, avînd fie-

[1] Sferica era termenul folosit în loc de astronomie.

[2] Architas citează aici cele patru obiecte ale învățămîntului superior din școala lui Pitagora: geometria, aritmetica, astronomia și muzica, denumite în evul mediu quadrivium.

care metoda sa proprie de cercetare și de exprimare, însă legate toate între ele prin diferite căi de comunicație?

— Mi-ai pus o întrebare la care nu-ți pot da un răspuns precis și nici nu știu dacă există! Dar, mai înainte de a-ți spune părerea mea, țin să-ți atrag atenția că nu trebuie să confunzi extraordinara *diversificare* a matematicilor actuale cu *unitatea* ei. Azi este cu totul și cu totul excepțional ca un matematician să se simtă la el acasă în orice domeniu al matematicilor sau să abordeze, cu aceeași ușurință, două sau mai multe domenii diferite. De cele mai multe ori, el se mulțumește să fie la curent și să-și dea contribuția numai într-un capitol dintr-o anumită parte a unui anumit domeniu. Cu toate acestea eu cred, intuitiv, și n-aș putea să-ți spun de ce, că există o *singură știință matematică* care își dezvăluie, pe zi ce trece, tot mai precis ființa. Mi-o arată bunul simț și faptul că pot deosebi un capitol de matematică de altul care nu-i matematică, de pildă, de logică. Am ales logica și nu fizica sau medicina, fiindcă mi-ai putea obiecta că acestea sînt științe experimentale, și apoi logica este destul de aproape de matematică, dar logica nu-i matematică și nici invers, deși există un capitol de *logică matematică*. De altfel, îmi amintesc de un prea frumos articol al lui N. Bourbaki cu titlul: „Arhitectura matematicilor"[1] în care se discută această problemă. Și el accentuează că acolo unde un *observator superficial* consideră că sînt două sau mai multe teorii distincte, între care un matematician genial a știut să stabilească punți de legătură, un *observator mai atent* pune în lumină *ideile comune* ascunse în formele exterioare, complet diferite, ale acelor teorii.

— Da, iată că au trecut 330 de ani de cînd Descartes a pus în lumină ideile comune ale algebrei și ale geometriei și a creat în felul acesta un nou instrument de cercetare matematică: *geometria analitică*!

— Dacă ar fi să respecți adevărul istoric ar fi trebuit să-l amintești cel puțin pe Fermat, dacă nu și pe Apollonius. Dar fiindcă urmărim altă idee, ți se iartă!

[1] F. le Lionnais: Les grands courants de la pensée mathématique, Paris, 1948.

— Mulțumesc. Dă-mi și tu un exemplu mai plastic!

— Îmi vine în minte un exemplu, care, la originea lui, numai plastic nu se putea chema. Anume, *ideea de grup*, introdusă de tînărul Evariste Galois în 1830, cu scopul de a demonstra o anumită teoremă despre rezolvarea ecuațiilor algebrice de ordin superior. Vezi bine că e vorba de o idee aplicată numai într-un foarte restrîns domeniu al matematicilor: *teoria ecuațiilor algebrice*, care atunci aproape că n-a fost remarcată. Azi a devenit cel mai puternic stîlp pe care se sprijină teoria despre unitatea matematicilor.

— Dacă vrei să-mi vorbești despre *teoria grupurilor*, atunci recunosc că ești un bun platnic!

— Personal, n-am nici un merit dacă nu-mi punea nepotul tău întrebarea aceea șugubeață, nu mi-aș mai fi amintit de promisiunea care ți-am făcut-o atunci, cînd am discutat despre rezolvarea ecuațiilor prin radical.

— Pesemne că nu-i venise ceasul! Mi-aduc aminte că atunci mi-ai arătat că rezolvarea ecuației de gradul 5 prin radicali a preocupat pe mulți matematicieni de seamă.

— Da, și printre alții pe Lagrange care, prin cercetările sale, a stabilit calea ce l-a condus pe Galois înspre teoria grupurilor. El și-a propus să analizeze pe rînd procedeele folosite cu succes, în rezolvarea ecuațiilor de gradul 2, 3 și 4 prin radicali, și să stabilească astfel prin comparație de ce dau greș aceste metode în cazul ecuației de gradul 5 sau mai mare. Rezultatele stabilite de el conțin, în germen, soluția exprimată abia după moartea lui. Anume, Lagrange stabilește că succesul metodelor folosite în cazul ecuațiilor de gradul 2, 3 sau 4 se bazează pe posibilitatea de a rezolva o anumită ecuație, depinzînd de rădăcinile ecuației date, care este, în toate aceste trei cazuri, de un grad mai mic decît ecuația considerată. Această ecuație ajutătoare, formată din rădăcinile ecuației date, a fost numită de către Lagrange *ecuație rezolvantă*. În cazul unei ecuații de gradul 5, Lagrange găsește că gradul ecuației rezolvante este 6, adică nu este mai mic, ci mai mare decît al ecuației date.

— Drept să-ți spun îmi pare prea complicat acest procedeu și n-am înțeles mare lucru. N-ai vrea să ne oprim aici și să-mi arăți mai clar, pe un exemplu, despre ce-i vorba?

— Ba da. Cel mai simplu este să pornim de la ecuația de gradul al doilea

$$x^2 + px + q = 0 \text{ unde } x_{1,2} = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{2}\right) - q}$$

După cum știi, între coeficienții p și q ai acestei ecuații și rădăcinile ei, x_1 și x_2 există relațiile:

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

Înlocuind sub radical, coeficienții p și q prin rădăcinile ecuației, avem:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - x_1 x_2} = \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)^2}{4}} =$$

$$= \frac{(x_1 - x_2)}{2}$$

Așadar, radicalul s-a exprimat printr-o relație liniară între cele două rădăcini, relație care prezintă unele proprietăți speciale. Mai întîi că este indiferent care dintre rădăcini o consider a fi prima și care a doua și apoi că această expresie de sub radical: $(x_1 - x_2)^2$ păstrează aceeași valoare dacă înlocuiesc pe x_1 cu x_2 și pe x_2 cu x_1. Dar dacă expresia de care depind valorile rădăcinilor ecuației de gradul al doilea are o singură valoare, înseamnă că pentru a o afla trebuie să rezolv o ecuație de gradul întîi! Cu alte cuvinte, rezolvarea ecuației de gradul doi prin radicali *se poate efectua*, căci ea depinde de rezolvarea unei alte ecuații de gradul întîi.

— Asta îmi este foarte clar! Să consider acum și ecuația cubică

$$x^3 + px + q = 0$$

ale cărei rădăcini, după cîte îmi amintesc, sînt date de formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{q^2}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} + \frac{q^2}{27}}}$$

— În acest caz, Lagrange stabilește că fiecare dintre radicalii cubici se poate scrie sub forma

$$\frac{1}{3}(x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)$$

unde ω este una dintre rădăcinile cubice ale unității, adică ale ecuației $z^3 - 1 = 0$.

Calculele, deși mai complicate, le poți face singur, ținînd seamă de relațiile între coeficienți și rădăcini, ca să te încredințezi de puterile ce le ai! Nu sînt sigur însă că vei fi în stare să observi, așa cum a reușit să o facă Lagrange, că funcția formată din aceste 3 rădăcini:

$$t = (x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3)^3$$

nu ia decît *două valori distincte*, cînd se fac toate permutările celor 3 rădăcini x_1, x_2 și x_3.

— Adică se înlocuiește x_1 cu x_2 sau cu x_3 și așa mai departe?

— Da. Cînd se dă o grupă de 3 numere sau de 3 elemente oarecare, deosebite între ele, acestea se pot schimba în interiorul grupei, în 6 feluri, de pildă scriind numerele: (1, 2, 3) poți face permutările: (1, 3, 2); (2, 1, 3); (2, 3, 1); (3, 1, 2) și (3, 2, 1).

Cu patru numere se pot face $1.2.3.4 = 16$ permutări și în general cu n elemente $1.2.3.\ldots.n = n!$ permutări. Expresia n! se numește „n factorial" și arată, într-o formă prescurtată, *produsul primelor n numere*. Acum, dacă revenim la *funcția rezolvantă* „t", rezultă că, pentru a-i găsi valorile ei, este suficient să rezolv o ecuație de gradul al doilea în t care, după Lagrange, se numește *ecuație rezolvantă*.

— Înțeleg, rezolvarea ecuației cubice se reduce deci la rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea. Probabil că

exact același lucru se întîmplă și cu ecuația de gradul al patrulea.

— Da. Lagrange arată că, în acest caz, funcția rezolvantă este $u = x_1 x_2 + x_3 x_4$ care nu ia decît *trei valori distincte*, atunci cînd se fac toate permutările posibile dintre cele 4 rădăcini. De aici el deduce că valorile lui „u" verifică o ecuație de gradul al treilea, care are drept coeficienți funcții raționale de coeficienții ecuației date. „Acest proces de permutare a rădăcinilor constituie întreaga filozofie a rezolvării ecuațiilor de gradul 3 și 4", scrie Lagrange, și își propune în continuare să studieze care sînt condițiile în care gradul ecuației rezolvante este mai mic decît al ecuației date, deci să existe posibilitatea rezolvării ecuației prin radicali. În acest scop pentru o ecuație de gradul n el formează o funcție t, definită prin relația:

$$t = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 + \ldots \omega^{n-1} x_n,$$

unde $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ sînt rădăcinile ecuației date și ω una dintre rădăcinile unității, adică a ecuației: $z^n - 1 = 0$. Aceasta este funcția rezolvantă. Gradul *ecuației rezolvante* va fi indicat de numărul valorilor pe care le poate avea funcția t. Însă în general, în această funcție t se pot schimba între olaltă toate rădăcinile $x_1, x_2 \ldots x_n$ și, la fiecare permutare, t va lua o altă valoare. Ecuația rezolvantă va avea, în general, gradul n!, așadar cu mult mai mare decît acela al ecuației propuse. Problema se reduce la a găsi cazurile particulare, cînd, printr-un artificiu sau procedeu anumit, gradul ecuației rezolvante poate fi coborît, așa cum s-a întîmplat la ecuația de gradul 3 sau 4. „Asupra acestui lucru mi-e greu, dacă nu imposibil, să judec apriori" scrie Lagrange. Căci, pentru ca să se poată coborî gradul ecuației rezolvante, ar trebui ca funcția rezolvantă *să păstreze aceeași valoare*, adică să rămînă *invariantă* la anumite permutări ale rădăcinilor. „Iată, spunea tot Lagrange, dacă nu mă înșel, adevăratele principii pe care se bazează rezolvarea ecuațiilor și analiza cea mai potrivită care conduce într-acolo; după cum se vede, totul se reduce la un fel de calcul al combinărilor prin care se găsesc apriori rezultatele la care te poți aștepta!"

Prin această observație, Lagrange a atins miezul teoriei grupurilor finite, dezvoltată de Cauchy și perfecționată de Galois.

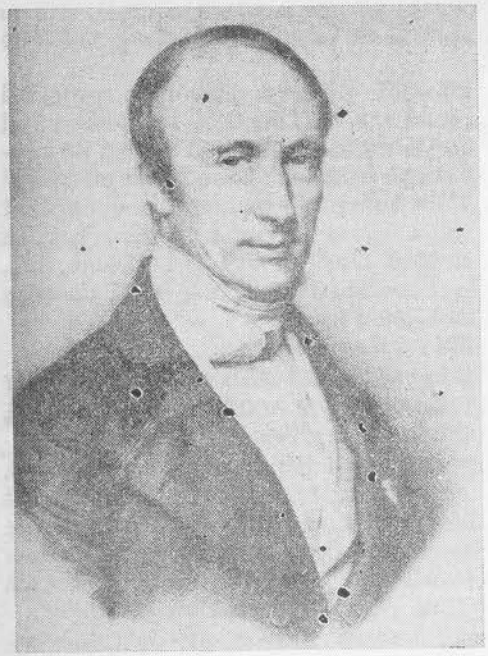
— Nu-ți închipui cu cîtă plăcere urmăresc procesul acesta de plămădire a unei teorii. Îmi face impresia că el se desfășoară exact după aceleași legi ca și acelea de coacere a pîinii. Deocamdată se frămîntă bine făina cu apă și se adaugă sarea. Cam atîta a făcut Lagrange. Acuma aștept să văd cum pune Cauchy drojdia și, după ce va frămînta coca bine, să o lase la dospit. Desigur că totul e făcut, dar, dacă nu se pune la copt, degeaba, pîinea nu-i bună de mîncat. Galois a copt pîinea, nu-i așa?

— N-ai vrea să o vezi cum se dospește?

— O, da! Ba chiar te-aș ruga să-mi vorbești ceva și despre Cauchy, fiindcă nu știu nimic despre acest *mare* între *mari*, deși i-ai pronunțat numele în multe și variate ocazii!

— Augustin Cauchy era unul dintre copiii revoluției. S-a născut în 1789 și a supraviețuit numai fiindcă tatăl lui nu a fost numai un subtil erudit, ci și un excelent părinte și cap de familie. În acea epocă de foamete și neagră mizerie, el s-a refugiat cu familia la țară, reușind să-și crească copiii, cu puținele legume pe care le cultiva el singur.

Timp de 11 ani a durat această stare de cvasisălbăticire, școlile erau închise și fiindcă copiii trebuiau educați, Louis Cauchy-tatăl a compus manuale de gramatică, de istorie și de morală. Ca lecțiile să fie mai ușor de reținut, ele au fost scrise în versuri. În anul 1800 întreaga familie se reîntoarce la Paris, unde Louis Cauchy este numit secretarul Senatului și, în această calitate avea biroul său în Palatul Luxembourg. De la început, Augustin a fost adus în biroul tatălui său. I s-a rezervat un colț al lui unde să poată studia și mai ales să asculte conversațiile savante, pe care le întreținea de multe ori Louis Cauchy cu prietenii săi ce veneau adesea să-l viziteze acolo. Printre ei era și Lagrange, pe atunci profesor la Politehnică. Acesta a remarcat îndată talentul neobișnuit al tînărului Augustin pentru matematici și, se spune că odată, pe cînd erau în birou împreună cu Laplace și cu alți oameni de știință, la observația ridicată



Augustin Cauchy

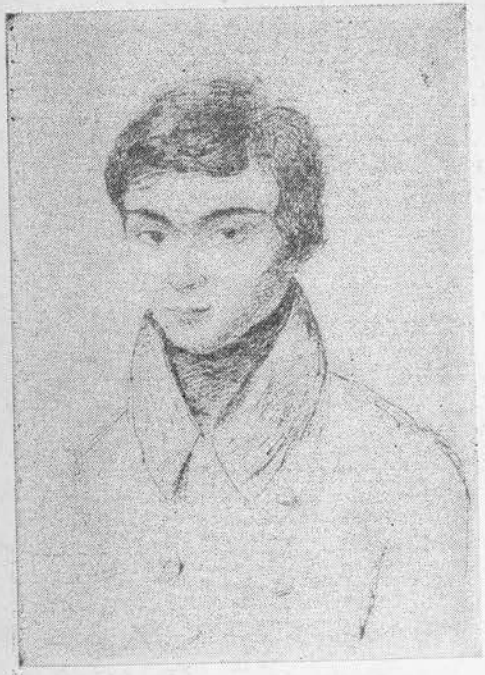
de Laplace în legătură cu atracția lui Augustin spre matematici, ar fi spus: „Îl vedeți pe acest tînăr? Ne va depăși, oricît de matematicieni am fi". De altfel tatălui i-a dat un sfat, pe care acesta l-a ascultat întocmai: „Nu-ți lăsa feciorul să se atingă de cărți de matematică superioară pînă la 17 ani, căci dacă nu te vei grăbi să-i dai o solidă educație literară, talentul lui îl va îndepărta pentru totdeauna de literatură și el va deveni un mare matematician dar nu va ști să scrie corect în limba lui". La liceu obține toate premiile posibile și la 16 ani se pregătește să dea examenul de admitere la Școala Politehnică și reușește al doilea pe listă. La același examen, Galois, la 18 ani, cu lucrări matematice originale, va fi respins a doua oară! Cauchy este admis la 18 ani la Școala de ingineri civili și devine inginer la 21 de ani. Imediat este trimis să îndeplinească un serviciu important la fortificațiile din Cherbourg și rămîne acolo 3 ani. Dar obligațiile lui inginerești îi lăsau vreme și pentru matematici, iar de la primele memorii pe care le-a prezentat Academiei de științe din Paris s-a adeverit prevestirea lui Lagrange. În 1815 publica lucrarea „Asupra numărului de valori pe care le poate lua o funcție, cînd se permută, în toate felurile posibil, cantitățile pe care le conține". În ea se afla baza teoriei grupurilor finite, deși termenul de grup nu-i introdus — în locul lui, fiind folosit cuvîntul *substituții* — anume, teoria substituțiilor și sisteme de substituții conjugate. Termenul de *grup* va fi folosit abia peste 15 ani de către Galois.

— Ce a spus Lagrange cînd a citit această lucrare care o continuă pe a sa?

— Nu a mai putut spune nimic fiindcă părăsise această lume cu doi ani mai înainte! Dacă ar fi trăit, ar fi avut satisfacția de a-și vedea opera lui din tinerețe, — avea 31 de ani cînd a publicat primul memoriu — prezentată într-o nouă și strălucitoare lumină de un alt tînăr — Cauchy — numai de 26 de ani, care va continua-o, reluînd-o după o pauză de un sfert de veac, ca să o întregească într-o formă perfectă. S-a întîmplat cum ai spus tu, Cauchy a pus drojdia în aluat și l-a lăsat să dospească. Realizările lui Cauchy sînt așa de strînse de acelea ale lui Galois încît voi vorbi despre ele o singură dată, cînd pîinea va ieși caldă din cuptor.

— Atunci să-l căutăm și pe Evariste Galois. Cînd intervine el în acest proces de creație?

— Pe cît de multe și bogate în amănunte sînt informațiile despre Cauchy, că i-am putea urmări aproape pas cu pas viața, pe atît de puține și sărace în detalii sînt acelea despre viața lui Galois. În Dările de seamă ale ședințelor Academiei de Științe din Paris se arată că în 25 mai 1829 „Cercetările de algebră ale d-lui Evariste Galois, prezentate de d. Cauchy, sînt trimise pentru referat", iar în ședința din 1 iunie 1829 că: „Dl. Cauchy prezintă, în numele d-lui Galois, un manuscris, intitulat «Cercetări asupra ecuațiilor algebrice de grad prim», iar d-nii Poisson și Cauchy sînt numiți referenți". Galois avea 18 ani.



Evariste Galois

— Perfect! Nici nu se putea o mai bună alegere!

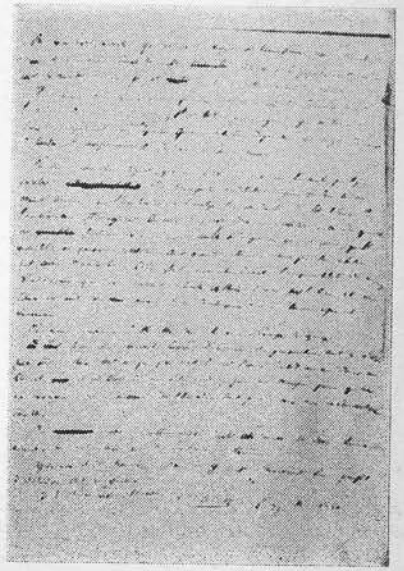
— Nici nu-ți dai seama de cîtă ironie ești capabil!

— Cum? Dar cine altul putea să înțeleagă mai bine lucrarea lui Galois și să-i facă un referat mai serios decît Cauchy, care s-a ocupat de această problemă cu 14 ani în urmă? Și apoi, însăși tinerețea lui Galois ar fi putut să-l impresioneze pe Cauchy, amintindu-i de a lui, de sprijinul și încurajarea pe care i-a dat-o Lagrange! Cum a fost referatul?

— Nu a existat nici un referat! Cauchy a *rătăcit lucrarea*. Dar nu te speria! Nu a fost singura durere a lui Galois din anul acesta. Alta a fost aceea că era respins, *a doua oară*, de la concursul de la Școala Politehnică unde, printre alții, era profesor și Cauchy, care fusese ales în 1816 și membru

al Academiei, recunoscut astfel printre cei mai mari matematicieni ai timpului. Dar n-am terminat cu durerile lui Galois din 1829: în iulie se sinucide tatăl său, din cauza unor persecuții și pe lîngă durerea acestei pierderi de neînlocuit, se adaugă și sarcina de a îngriji de mama sa și de fratele mai mic! Tot atunci depune la Academie lucrările lui pentru marele premiu, dar secretarul permanent al Academiei, Fourrier, care a luat manuscrisul la el acasă, probabil ca să-l cercetaze, moare înainte de a-l fi restituit! Ți-am spus toate acestea ca să vezi cum poate fi viața unuia și cum poate fi a altuia, deși azi amîndoi sînt considerați, în istoria matematicilor, la același nivel: Cauchy cu 789 memorii care umplu 24 de volume mari, iar Galois cu o cărțulie de 60 de pagini!

— Acuma, dacă-i vorba să-i facem proces lui Cauchy, s-ar găsi o circumstanță atenuantă: În 1829 Cauchy nu era încă destul de bătrîn, ca să se lase înduioșat de tinerețea



Ultima pagină scrisă de Galois înainte de duel

Abel

lui Galois sau de amintiri personale! El era atunci în floarea vîrstei, om la 40 de ani, conștient de superioritatea lui dar și foarte prins de atîtea obligații sociale. Să nu punem la socoteală decît cursurile care trebuiau pregătite, ședințele de la Academie la care trebuia să asiste, lucrările personale, care, dacă judecăm după volumul lor, trebuie să-i fi luat zilnic multe ore, mai ales că pe vremea aceea nu existau mașini de scris.

— În privința volumului lucrărilor sale științifice, lăsînd la o parte anecdotele care circulau pe seama lor, Cauchy își poate discuta fecunditatea numai cu doi matematicieni din lume: Euler și Cayley. Însă, oricît de ocupat ar fi fost, nu-i admisibil să nu arunci măcar o privire asupra unei lucrări cu un conținut care-ți era familiar!

— Ba da. Îi erau suficiente ideile și lucrările lui!

— Aici, cam ai dreptate! O mai făcuse, cu vreo 3 ani mai înainte, altui tînăr de geniu, lui Abel. Și lui i-a rătăcit manuscrisul care a fost publicat, după moartea lui Abel,

fiindcă și Abel moare la 27 de ani! Știi ce scrie Abel despre Cauchy, unui prieten al său? „Am terminat o mare lucrare asupra unei anumite clase de funcții transcendente... pe care am s-o prezint Academiei de științe, luna viitoare. Am arătat lucrarea d-lui Cauchy, dar el abia a catadicsit să arunce ochii asupra ei. Și, aș îndrăzni să spun, fără să mă laud, că e o lucrare frumoasă. Sînt curios să aud părerile Institutului..." Dar aceste păreri nu le-a putut auzi niciodată, fiindcă domnul Cauchy a rătăcit și manuscrisul, care, mai tîrziu, îl va trece pe Abel printre nemuritori! Exact în anul în care Abel murea în Norvegia, îndurerat că nu-i venea nici o veste, Galois înmîna cu emoție și încredere manuscrisul lui, ca să-i fie pierdut!

— E adevărat că-s coincidențe curioase și, totuși, s-ar putea să nu fie de fapt nimic altceva decît niște coincidențe fatale, ale acestor doi tineri minunați, care au trăit cam în același timp și au avut cam aceeași soartă. Îmi vin în minte versurile, scrise de un frate al lor, întru geniu și destin cam după vreo 50 de ani:

„Ei doar au stele cu noroc.
Și prigoniri de soartă..."

— De altfel nici Cauchy, căruia soarta îi surîsese cu atîta grație pînă acum, nu a fost scutit de sfredelitoarele încercări ale durerii, începînd chiar din 1830. Revoluția din acest an și alungarea regelui Carol al X-lea căruia îi jurase credință, îl fac pe Cauchy să-și părăsească familia și să plece în exil.

— Dar de ce? Făcea parte din anturajul regelui? Era politician?

— Nu, nici una nici alta. Ba nici nu a plecat împreună cu suita regală, ci așa, de unul singur, în Elveția! Se vede că nu era el chiar prea teafăr! În scrisoarea aceea a lui Abel, există chiar această propoziție: „Cauchy e nebun" după care însă urmează relativ la matematici „ceea ce face este excelent"! Gestul lui a fost considerat ca un donquijotism. Din Elveția plecă în Sardinia unde a fost invitat de regele Carol Albert, care-i oferea catedra de Fizică-matematică de la Universitatea din Turin. El primi bucuros propunerea

și se apucă să învețe limba italiană. Timp de doi ani ține cursurile în limba italiană și ar mai fi stat acolo dacă fostul lui rege, care se afla la Praga, n-ar fi avut năstrușnica idee să încredințeze educarea fiului său, în vîrstă de 13 ani, acestui supus credincios!

— Asta-i colac peste pupăză!

— Avea omul păcate de ispășit, așa că trebuia să și le ispășească! A lăsat tihna studiului și a plecat la Praga, unde și-a chemat și familia și cinci ani încheiați a dădăcit, din zori pînă-n noapte, odrasla regală. Ar fi continuat această muncă istovitoare și necompatibilă cu chemarea lui dacă nu l-ar fi ajutat colegii lui de la Academie care l-au chemat în Franța arătînd că locul lui exista, fiindcă el nu-și dăduse demisia, și nici nu era obligat, în calitate de academician, să depună jurămînt noului rege!

— S-a întors deci în Franța?

— Da, povestea e foarte lungă și nostimă, dar nu-și are locul aici. Atîta vreau să-ți mai spun că în cei 19 ani cît a mai trăit, și-a scos omul din capete și a publicat nu mai puțin de 500 de memorii, printre ele și cărți, din diferite domenii ale matematicii, fizicii, mecanicii, astronomiei. Printre lucrările lui Cauchy din această perioadă, sînt cîteva care tratează din nou teoria substituțiilor, sau, cum se numește azi, teoria grupurilor finite, sintetizînd, într-un sistem unitar, ideile lui Lagrange și ale altor cercetători. El demonstrează și teorema fundamentală, enunțată de Galois fără a fi demonstrată.

— Dar atunci Cauchy a cunoscut manuscrisul lui Galois?

— Nu era necesar! Ți-am mai spus că teoria pe care o dezvoltă Cauchy se acoperă perfect cu o parte a teoriei lui Galois și deci a putut ajunge el singur la această teoremă. Nu-i lipseau lui Cauchy nici spiritul de rigurozitate, — el este acela care îl introduce în analiză — și nici ideile. Eu cred că el a uitat de întîlnirea cu Galois chiar de atunci, mai ales că puțin după aceea a și părăsit Franța!

— Da, foarte probabil că nici nu a bănuit vreodată ce dureri neînchipuite a fost în stare să dezlănțuie, în viețile celor doi tineri! Pentru el, Abel trebuie să fi fost un tînăr

norvegian, ca atîția alții, care a avut ambiția să stea de vorbă cu Cauchy și să-i prezinte o lucrare. Bine, i-a satisfăcut dorința, a fost politicos cu el, ce putea face mai mult? Galois? Un zvăpăiat, cam încrezut, ce importanță avea pentru el? Era prea ocupat, ca să-și mai piardă vremea cu toate ambițiile acestor tineri! Dacă va fi ceva de capul lor, se vor descurca ei și singuri! Poate că a gîndit așa...

— Trebuie să știi că opera lui Galois a fost cunoscută de către matematicieni abia după anul 1870, așadar cu 40 de ani mai tîrziu, cînd nici Cauchy nu mai era în viață. În acel an, Camile Jordan a publicat vestita sa carte „Tratat despre substituții și ecuații algebrice" în care prezintă pentru prima oară *noțiunea de grup* așa cum a introdus-o Galois și arată cîtă importanță are ea în teoria generală a ecuațiilor.

— Dar ce se înțelege prin *grup*?

— Prin *grup* se înțelege o mulțime finită sau infinită de elemente, care satisfac următoarele patru condiții;

1. Există *o lege de compoziție* (notată $\wedge$) care face să corespundă, la două elemente oarecari din mulțimea considerată: a și b, (luate în această ordine) un alt element din aceeași mulțime, c, care este compusul celor două:

$$(a \wedge b) = c.$$

2. Legea este asociativă, adică atunci cînd intervin 3 sau mai multe elemente din grup, avem:

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c),$$

unde paranteza arată operația efectuată, semnul de operație fiind $\wedge$.

3. Există un *element neutru*, care se mai numește și *unitate* sau chiar *identic* notat cu litera „e", astfel ca pentru orice element a din mulțime să avem:

$$a \wedge e = e \wedge a = a.$$

4. Fiecare element admite un *element invers* a^{-1}, numit și *simetric*, astfel ca

$$a \wedge a^{-1} = a^{-1} \wedge a = e.$$

— Trebuie să-mi dai mai multe lămuriri. Mai întîi ce înțelegi prin *elemente*?

— Orice vrei tu, este cu totul indiferentă natura lor: pot fi *numere* dar tot așa de bine pot fi *mulțimi de numere*, sau *funcții* de orice natură, și cu oricîte variabile, pot fi *simboluri matematice*, pot fi *operații matematice* sau *operații* care să se refere la orice domeniu, din orice știință. Asupra naturii elementelor nu se face nici o ipoteză și nu se pune nici o condiție, în afară de acelea cerute de existența grupului ca atare.

— Bine. Acuma ce înțelegi prin *lege de compoziție*?

— Iarăși ceva foarte vag, este operația prin care, din asocierea a două elemente, apare al treilea, toate trei însă făcînd parte din mulțime. De pildă, în cazul numerelor sau mulțimilor de numere, operația ar putea fi *adunarea*, dar tot *adunare*, deși nu-i vorba de adunarea numerelor, s-ar numi și operația în cazul cînd asocierea elementelor se face după o lege care are oarecare asemănare cu adunarea. În acest caz, în locul semnului general de operație se folosește chiar semnul $+$. Mai mult, dacă legea de compoziție este adunarea atunci elementul neutru, acela care în operația cu un alt element îl lasă neschimbat, este zero: $e = 0$.

— Și elementul invers este numărul cu semn schimbat?

— Da, căci numai în acest caz: $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

— Am observat că și atunci cînd ai notat cele 4 condiții și acuma, ai scris de două ori operația în cazul elementului neutru și al inversului, de ce?

— Aceasta este obligatoriu, fiindcă trebuie specificat că, în cazul acestor două elemente particulare, operația are loc atît la stînga cît și la dreapta elementului dat, ceea ce nu se întîmplă în cazul a două elemente oarecari. În prima condiție am spus clar că trebuie bine observată ordinea în care se consideră cele două elemente, fiindcă legea de comutativitate nu-i obligatorie aici. $2 + 5 = 7$ și în cazul adunării se pot schimba termenii și scrie $5 + 2 = 7$. Nu însă și între elementele din grup! În general legea de compoziție nu este comutativă și $a \wedge b \neq b \wedge a$. Cînd oricare ar fi a și b, $a \wedge b = b \wedge a$, atunci elementele se zic *permutabile* iar

grupul se numește *comutativ*. Dar operația, pe care am numit-o lege de compoziție, ar putea fi *înmulțirea* sau ceva asemănător. În acest caz, în locul semnului general se folosește semnul înmulțirii algebrice, adică punctul sau nici un semn.

— Dacă e vorba de înmulțirea propriu-zisă, atunci elementul neutru este 1, iar inversul lui a este chiar $\frac{1}{a}$?

— Așa-i. $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ și $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.

— Dar în cazul înmulțirii este îndeplinită și comutativitatea?

— Numai dacă elementele grupului sînt numere, altfel nu. De pildă, dacă elementele ar fi vectorii, există o înmulțire a vectorilor care nu-i comutativă. Dar fiindcă te necăjește această necomutativitate, am să-ți dau un exemplu care te va lămuri. Să admitem că notez cu a operația de dublare a unei mărimi, iar cu b micșorarea cu 3 a mărimii respective. Fie x acea mărime, căreia să-i aplic succesiv operațiile a și b. Prin prima operație se obține $2x$. Aplicînd mărimii $2x$ operația b avem ca rezultat: $2x-3$. Acum să-i aplic lui x operațiile succesive b și a. Prin prima operație se obține $x-3$ și aplicîndu-i acesteia cea de a doua operație găsim: $2(x-3)$. Or, e clar că $2x-3 \neq 2(x-3)$.

— Da. Asta-i acuma clar. N-aș putea spune însă același lucru despre *grup*! Nu știu cum, dar parcă nu-l am în mînă!

— Să încercăm să-l prindem! Să consider ca lege de compoziție chiar adunarea și ca mulțime, mulțimea numerelor naturale. Formează această mulțime un grup?

— Nu știu! Ar trebui să verific dacă sînt îndeplinite cele 4 condiții!

— Bine, începe! Prima?

— Aceasta este îndeplinită, prin definirea adunării căci fiind date două numere naturale oarecari suma lor: $4+5=9$ este un număr natural. Chiar și a doua condiție este îndeplinită căci adunarea este asociativă: $2+(4+6)=(2+4)+6$. Însă celelalte două nu-s, căci nu am element neutru, deoarece zero nu face parte dintre numerele naturale și nici element

simetric, căci nu am nici numerele negative! Îmi pare foarte rău!

— Da'de ce? Alege-ți tu altă mulțime care, în condițiile stabilite, să formeze un grup!

— Acuma-i mai ușor. Cred că dacă am să consider mulțimea numerelor întregi, adică adaug pe zero și numerelor negative, am tot ce-mi trebuie!

— Dar dacă în locul adunării, ai fi considerat înmulțirea ca lege de compoziție a mulțimii numerelor întregi, această mulțime rămînea grup?

— Iar mă încurci! De unde vrei să știu, așa pe dinafară? Primele două condiții sînt îndeplinite... chiar și a treia căci există 1... dar nu am elementul invers numărului întreg. Nu pot scrie $5 \cdot x = x \cdot 5 = 1$. Pentru aceasta mi-ar trebui să adaug acestor numere și numerele fracționare!

— Atunci trage concluzia!

— Mulțimea numerelor raționale este un grup față de înmulțire.

— În acest caz i se spune și *grup multiplicativ*. Dar oare așa să fie?

— Cum? Aș fi putut greși?

— De! Omul e supus greșelii! Te rog să-mi spui care-i inversul lui zero?

— Extraordinar! Numai la asta nu m-am gîndit! Atunci ce facem?

— Îl dai afară pe zero, ca indezirabil, și spui că mulțimea numerelor raționale, din care s-a exclus zero, este un grup multiplicativ.

— Vezi? Ți-am spus eu că-mi scapă grupul printre degete?

— Ca să te familiarizezi cu el, și să nu-ți mai scape deloc printre degete, ne vom războ cu un *grup de transformări*, sau *de substituții*, după numirea dată de Cauchy. Cuvîntul transformare sau substituție, aplicat aici, înseamnă că, dată fiind o mulțime finită sau infinită de elemente, fiecărui element din mulțime îi corespunde un anumit element bine determinat din aceeași mulțime. Îți aduci aminte că asemenea probleme s-au introdus prin încercările de rezolvare prin

radicali ale ecuațiilor algebrice de ordin superior? Și că succesul lui Lagrange se datorește faptului că el a legat problema rezolvării ecuațiilor algebrice de a permutărilor rădăcinilor ei, stabilind că pot exista funcții raționale de aceste rădăcini care să rămînă invariante la permutările dintre rădăcini? Cauchy a făcut un pas mai departe, stabilind teoria generală a substituțiilor, iar Galois a arătat, pentru fiecare ecuație, care este grupul de permutări dintre rădăcinile ei, după care se recunosc proprietățile caracteristice ale acelei ecuații, stabilindu-se dacă se poate sau nu rezolva prin radicali. Ca să nu ne încurcăm în prea multe calcule, vom alege o mulțime formată numai din trei elemente a, b și c, pe care ne propunem să le permutăm în toate felurile posibile între ele. Mulțimea nou obținută prin aceste transformări sau permutări va forma obiectul cercetării noastre.

— Vrei să spui că elementele grupului sînt formate din toate permutările de trei elemente și că legea de compoziție este permutarea?

— Da. De aceea te sfătuiesc să-mi scrii aici cele 6 permutări, căci ai stabilit mai înainte că sînt 6, și anume să le notezi pe două rînduri: în rîndul de sus elementele în ordinea lor naturală și în rîndul de jos să indici transformarea respectivă. Pentru prescurtare să numești fiecare permutare cu cîte o literă mare.

— Să încerc. Prima permutare o las neschimbată. Știi? Parcă încep să întrezăresc ceva! Această permutare va fi elementul neutru și o voi nota cu 1! Am deci:

$$A = 1 = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix};$$

(1)

$$D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

— Trebuie să stabilești dacă aceste 6 elemente formează un grup. Se obișnuiește a se numi această operație produs. Așa că folosește semnul respectiv.

— Încep: prima condiție: produsul a două permutări, de pildă B,D, este o altă permutare! Voi efectua permutarea așa cum mi-o indică, pe rînd, cele două permutări alese. Voi spune deci: a prin B rămîne a și a prin D trece în b, apoi b prin B trece în c iar c prin D trece în a și c trece în b iar b trece în c. Scriind în același mod ca și pînă acum am:

$$B.\ D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & c \end{pmatrix} = C.$$

— Încearcă și produsul D.B.

$$D.\ B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & b & a \end{pmatrix} = F.$$

Rezultă că *produsul nu-i comutativ*, deci grupul, dacă va fi grup, nu-i abelian!

— Cum? vorbești așa de ușor despre necomutativitate? Nu te mai sperie?

— Iacă nu! Legea de asociație nu trebuie să o mai verific, căci prin însuși procesul permutărilor ea se verifică! Elementul neutru sau unitate există! Este permutarea A. Și e clar că $A \cdot C = C \cdot A = C$!

— Numai cu ultima condiție nu merge deloc! Știu că trebuie să fie grup, că doar de aceea mi l-ai pus înainte, dar cum vine asta? Element simetric sau invers? După definiție ar trebui ca produsul a două permutări să dea permutarea identică, oricum le-aș face de la dreapta sau de la stînga. Înseamnă că trebuie să iau pe rînd și să încerc toate permutările, pînă aflu rezultatul?

— Și ce? Ți-e lene? Uite, am să te ajut eu: $B.B = C.C = A$. Ți-am arătat astfel că B și C sînt și propriii lor simetrici. Încearcă tu produsul D.E

$$D.\ E = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \end{pmatrix} = A = E.D.$$

— Am stabilit astfel inversele elementelor A, B, C, D și E. A mai rămas F. Dar e simplu, căci și el este propriul

lui invers: adică $F.F = A$ căci uite, a trece în c și c în a, b rămîne pe loc iar c trece în a și a în c! Prin urmare, domnule Solonar, află mata, de la mine, că permutările formează un grup necomutativ! Mai ai ceva de adăugat?

— Și încă multe și mărunte! Întîi să-mi strîngi toate rezultatele într-o *tablă*, exact cum este *tabla înmulțirii!*

— Ești cam îndrăzneț! Ce? Aici am făcut înmulțiri? De la a folosi cuvîntul produs și pînă la înmulțire,... mai va, bădie!

— Ba, să avem iertare! Nu ai stabilit că $B.D = C$? că $D \cdot B = F$? atunci, ce mai vrei? Știi cu precizie cît face produsul dintre două elemente? Cine te oprește să scrii aceste produse într-o tablă, ca să le ai, odată pentru totdeauna, și nu ori de cîte ori îți vor trebui să le mocoșești din nou! Singura convenție este ca, în produsul dintre doi factori, primul să fie căutat pe linii și al doilea pe coloane. Asta din cauza necomutativității produsului. Aș mai adăuga că acest grup se numește de ordinul 6, după numărul total de operații distincte care sînt prezente în acest caz. Așadar, te rog să formezi tabla înmulțirii!

(T)

	A	B	C	D	E	F
A	A	B	C	D	E	F
B	B	A	D	C	F	E
C	C	E	A	F	B	D
D	D	F	B	E	A	C
E	E	C	F	A	D	B
F	F	D	E	B	C	A

— Cred că 6 este cel mai mic ordin pe care-l poate avea un grup de permutări, ținînd seamă că cu două elemente nu ai ce permutări să mai faci!

— Nu, dar în cazul a trei elemente, se pot face și grupuri de ordin mai mic decît 6. Tu însuți sper să-mi stabilești, cu ajutorul tablei (T), grupuri de ordinul 3, 2 și chiar 1! Ca să te ajut, am să-ți amintesc condițiile: primele două sînt îndeplinite de la sine, dat fiind existența tablei. În noile table trebuie deci să existe unitatea și elementul invers, atît.

— Înseamnă că trebuie să izolez din tablă rîndurile și coloanele cu mai puține elemente, dar atîtea cîte or fi, să îndeplinească condițiile 3 și 4? Îmi pare că elementele A, D și E formează un grup, căci am $E \cdot E = D$, $ED = A = DE$ și $DD = E$:

	A	D	E
A	A	D	E
D	D	E	A
E	E	A	D

Cu două elemente, ar fi A și B, A și C și A și F; căci

$$A = 1 \text{ și } \begin{cases} AB = BA = B \\ AF = FA = F \\ AC = CA = C. \end{cases}$$

	A	B
A	A	B
B	B	A

	A	C
A	A	C
C	C	A

și

	A	F
A	A	F
F	F	A

Și, în definitiv, pot considera și grupul format din elementul A, căci el fiind element unitate, este și propriul său invers. Deci am și grupul:

	A
A	A

— Află că asemenea grupuri provenite din grupul dat se numesc subgrupuri, și tu te poți mîndri că ai stabilit teorema fundamentală a grupurilor, enunțată de Galois și demonstrată de Cauchy, anume că:

„Orice grup al cărui ordin a divizibil printr-un număr prim p, conține cel puțin un subgrup de ordinul p".

— Așadar, fiindcă grupul considerat de noi era de ordinul 6, ai știut dinainte că el trebuie să aibă subgrupe de ordinul 3, 2 și 1 căci aceste numere sînt divizorii lui 6!

— Rămîne să facem un pas mai departe în teoria grupurilor, căci tabla de înmulțire n-am făcut-o noi, numai așa, de florile mărului. Prin ea vom păși înainte spre abstractizarea noțiunii de grup. Fiindcă, după cum ai observat, atunci cînd a fost să verificăm calitatea de grup a unei mulțimi, am considerat un grup concret, specificînd din ce fel de elemente anume se compune mulțimea și care anume este legea de compoziție a elementelor sale. Astfel tabla de înmulțire a fost stabilită pe baza relațiilor (1), în ea a fost extrasă esența, adică proprietățile caracteristice ale grupului de permutări formate cu 3 elemente. Însă, această tablă de înmulțire odată stabilită, se poate opera numai cu ajutorul ei, fără a se mai recurge la formulele (1). Or, experiența ne arată că există foarte multe grupuri concrete (avînd același număr de elemente dacă e vorba de un grup finit, sau de elemente care pot fi puse în corespondență biunivocă la nesfîrșit cînd grupurile sînt infinite) care, deși elementele lor sînt cu totul diferite, iar legile

lor de compoziție sînt de altă natură, aceste grupuri au proprietăți care se rezumă fie la același tablou (T), fie se pot traduce printr-un fel de vocabular întocmit anume în acest sens. În primul caz, elementele din asemenea grupuri se află în corespondență biunivocă și la orice produs din prima grupă corespunde produsul elementelor corespunzătoare din cea de a doua grupă. În al doilea caz, am să aleg, ca exemplu, mulțimea numerelor reale pozitive, care se pune în corespondență prin logaritmi, cu mulțimea tuturor numerelor reale.

— Dar totalitatea numerelor reale și pozitive formează un grup?

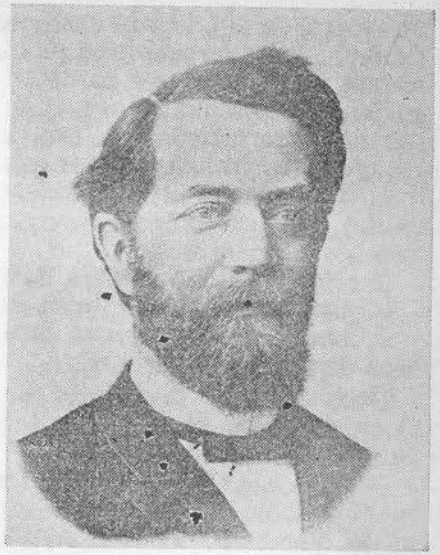
— Tu ce crezi?

— Grup aditiv în nici un caz nu poate fi, căci nu are numerele negative, dar grup multiplicativ? Da, ar putea fi, există 1 și fiecărui număr îi corespunde un invers! Atunci care-i vocabularul?

— Este acela pe care-l cunoști din teoria logaritmilor:

În loc de înmulțire se face adunare,
În loc de împărțire se face scădere,
În loc de ridicare la putere se face înmulțire,
În loc de exponent se pune coeficient
la elementul 1 (neutru) corespunde zero (neutru)
la numărul 2 (neutru) corespunde 0,30103... (logaritmul lui 2) etc. etc.

Asemenea corespondență biunivocă între grupele respective se numește *izomorfism*, iar grupele se zic că sînt *izomorfe*. Rezultă din această noțiune de *izomorfism* tendința de a defini un *grup abstract* în care nu se mai pune accentul nici pe natura elementelor asupra cărora se aplică o anumită lege de compoziție, nici asupra realizării efective a acestei legi, ci numai asupra *rezultatelor ei*, respectiv asupra *proprietăților formale*. De pildă, se poate da următoarea definiție a grupului abstract finit: „O mulțime de elemente A = 1, B, C,... L, a căror lege de compoziție este dată de tabla de înmulțire (T)," unde (T) ar fi o tablă analoagă cu aceea pe care am stabilit-o noi doi.



Felix Klein

— Stai că-s năuc de tot: „Deși vorbești pe înțeles, eu nu te pot pricepe".

— De ce? Datorită noțiunii de izomorfism, un grup poate fi studiat fie în mod abstract, fie în mod concret, pe un model sau printr-o reprezentare adecvată. Am să-ți dau un exemplu, pe care sînt sigur că ai să-l pricepi, fiindcă toate elementele cu care vom avea de a face îți sînt cunoscute. La sfîrșitul veacului trecut, Felix Klein a descoperit că toate rotațiile pe care le face icosaedrul în jurul axelor sale de simetrie formează un grup izomorf cu grupul permutărilor rădăcinilor unei ecuații algebrice de gradul 5 și de asemenea izomorf cu un alt grup, legat de anumite funcții ce se numesc eliptice. Iată deci, pe de o parte, necesitatea de a studia proprietățile grupului abstract care se degajă din aceste 3 grupuri concrete și, pe de altă parte, o splendidă imagine geometrică a rădăcinilor ecuației de gradul al cincilea, oferită de rotațiile icosaedrului!

— În adevăr, nu știu cum îs funcțiile eliptice, dar, făcînd abstracție de ele, văd în descoperirea lui Felix Klein și un exemplu legat de problema pe care ne-am pus-o la început, asupra unificării: trei capitole cu totul disparate, unite intim, în structura lor, cu ajutorul acestei noțiuni de grup abstract. Dar mișcările de rotație ale icosaedrului formează un grup? Ia stai să cercetez cele 4 condiții:

1. elementele mulțimii: mișcările de rotație ale icosaedrului, legea de compoziție: rotația în jurul axelor de simetrie ale icosaedrului.

2. rotația de a° + rotația de b° = rotația de (a + b = c)°

3. rotația neutră = rotația de 360°

4. rotația inversă există căci rotația se poate face în sens direct și în sens invers.

Dacă mișcările de rotație ale icosaedrului formează un grup, de ce nu formează grup și mișcările de rotație ale tuturor corpurilor regulate?

— Dar cine ți-a spus că nu formează grup? Ele caracterizează poliedrul respectiv și teoria lor este extrem de interesantă. Poate că, odată și odată, trăind și nemurind, vom vedea-o și pe aceasta! Prin exemplul pe care ți l-am dat, am vrut să mai trag spuza pe grupul abstract, fiindcă procesul de abstractizare s-a copt îndelung. Cauchy nu a bănuit existența grupului abstract, dar Galois se pare că a intuit-o. Cel puțin așa cred că reiese dintr-un pasaj pe care l-am reținut în linii largi dintr-o prefață scrisă de el cu un an înainte de a muri. Iată cam ce scrie Galois: „La începutul veacului, calculele au devenit așa de complicate încît ar fi barat progresul, dacă nu ar fi intervenit procedeele elegante ale matematicienilor moderni, cu ajutorul cărora mintea cuprinde dintr-o dată un mare număr de operații. Cred însă că și simplificările intelectuale aduse prin eleganța calculelor au o limită și va veni momentul cînd nici pentru transformările algebrice nu va mai fi timp și loc, ci va fi de ajuns să se știe că au fost prevăzute. A sări, cu amîndouă picioarele, peste calcule, a grupa operațiile, a le clasifica după dificultățile lor, iată, după părerea mea, misiunea viitorilor matematicieni, iată calea pe

care am urmat-o în lucrarea de față." Dar acela care tratează cu toată vigoarea grupurile abstracte este Arthur Cayley, cu vreo 30 de ani mai tînăr decît Cauchy. De aceea, de multe ori, tabla de înmulțire a grupului este numită și „pătratul lui Cayley". De altfel cu noțiunea de grup s-a repetat exact același proces care s-a petrecut cu mii de ani în urmă, cînd primii matematicieni, pe veci necunoscuți, au ajuns la noțiunea abstractă de număr, pornind de la noțiunile concrete de: o mulțime de pietre, sau o mulțime de degete, fiecare dintre ele fiind puse în corespondență biunivocă cu: o mulțime de animale, o mulțime de scoici, o mulțime de pești, o mulțime de fructe, o mulțime de oameni ș.a.m.d. Istoria se repetă: Pitagoricienii spuneau: „totul este număr", azi matematicienii spun: „totul este grup". Afirmația poate fi privită ca exagerată, fiindcă există încă mulțimi de obiecte matematice care nu se încadrează în structura de grup. Însă, prin simplitatea și generalitatea ei, structura de grup se întîlnește în foarte multe și variate domenii din matematică, contribuind prin aceasta să pună în evidență proprietățile structurale generale ale acestor domenii, privite la început ca separate și părînd a nu avea nici un raport între ele. Ar fi de ajuns să-ți dau ca exemplu numai trei dintre cele mai întinse: Algebra, Geometria și Analiza infinitezimală. Camile Jordan, în cartea despre care ți-am amintit, are meritul de a fi sintetizat toate rezultatele din teoria grupurilor, stabilite pînă atunci în algebră și teoria funcțiilor, punîndu-le astfel la dispoziția celor ce aveau să continue aceste cercetări, dar mai are un alt merit deosebit de important. Datorită numai lui, doi dintre cei mai dotați tineri matematicieni Sophus Lie și Felix Klein, veniți atunci la Paris, au hotărît să se preocupe de aplicarea teoriei grupurilor și în alte ramuri ale matematicilor. Așa se face că Sophus Lie a generalizat noțiunea de grup, definind grupurile continue de transformări, și le-a aplicat la rezolvarea ecuațiilor diferențiale. Aceste rezultate au dus mai departe la o extindere neașteptată a noțiunii de grup, la grupurile care azi se numesc *grupuri Lie* cu aplicații variate nu numai în matematici, ci și în

fizica matematică. Felix Klein a aplicat teoria grupurilor în geometrie, arătînd că fiecare ramură a geometriei se caracterizează printr-un *grup propriu*. Astfel geometriei euclidiene îi corespunde grupul mișcărilor, fiindcă proprietățile geometrice ale figurilor egale rămîn invariante prin mișcare.

— Observ că alături de noțiunea de grup apare mereu și aceea de invariant.

— Fiindcă una fără alta nu pot fi concepute. Tocmai în aceasta constă unul dintre meritele lui Galois, nu numai că-i primul care introduce ideea de grup dar aprofundează raportul care există între ideea de grup și aceea de invariant. De pildă, geometria euclidiană, care operează cu noțiunea de unghi și de raport a două distanțe, se definește ca teoria invarianților grupului de transformări compuse din toate mișcările și din toate transformările prin asemănare. Tot așa, geometria proiectivă tratează invarianții grupului de transformări proiective. A rămas faimoasă lecția inaugurală ținută de Felix Klein în 1872 la Universitatea din Erlangen. Ea este cunoscută azi sub numele de programul de la Erlangen. În această lecție inaugurală Felix Klein arăta, pentru prima oară, că fiecare ramură a geometriei poate fi considerată ca teoria invarianților unui anumit grup de transformări. Pe baza acestui principiu s-a putut extinde teoria grupurilor și la geometria diferențială și apoi să se stabilească legătura fundamentală dintre geometria euclidiană și cele neeuclidiene.

— După cîte îmi spui, cred că-i foarte nimerit aici proverbul: unde dai și unde crapă! Noțiunea de grup a fost introdusă la început ca un instrument util pentru soluționarea definitivă a problemei rezolvării ecuațiilor algebrice prin radicali. Cînd colo, acest instrument s-a dovedit a fi un fel de rază X, cu care s-a putut analiza structura intimă a diverselor teorii considerate pînă atunci ca distincte și grupa împreună! Îmi pare nespus de rău că, pentru mine, e prea tîrziu să învăț matematicile de la început ca astfel să pătrund mai adînc în aceste probleme ce-mi par admirabile. Exact ca și cum aș trece pe lîngă un cinematograf în care rulează un film de calitate și eu nu pot pătrunde în sală, ci trebuie să mă mulțumesc cu cele cîteva poze expuse în vitrină!

— Ca să te consolez, am să-ți redau o imagine foarte sugestivă, pe care am reținut-o din articolul lui Bourbaki, despre care ți-am vorbit azi, imagine din care reiese clar că nu-i decît o singură matematică!

— Din cîte am discutat pînă acum, înclin și eu spre această părere, așa că o aștept.

— Iat-o: el spunea că ai putea să-ți dai seama de viața internă a matematicilor, de ceea ce face unitatea și totodată diversitatea ei, dacă ai compara-o cu un mare oraș în care suburbiile nu încetează de a progresa folosind terenurile învecinate într-un mod oarecum haotic, în timp ce centrul se reconstruiește periodic, de fiecare dată după un plan mai clar și cu o întocmire mai maiestuoasă, dărîmînd vechile cartiere cu labirintul lor de ulicioare, pentru a lansa către periferii magistrale mai directe, mai largi și mai comode!

Cuprins

PROBLEMA INFINITULUI ÎN MATEMATICĂ
sau
Povestea lui Epimenide cel Mincinos..... 5

PROBLEMA CELOR ŞAPTE PODURI DE PE PREGEL
sau
De la amuzament la topologie..... 33

PROBLEMA PĂTRATELOR MAGICE
sau
Unde poate duce o problemă de şah 66

PROBLEMA INTUIŢIEI SPAŢIALE
sau
Geometria cu patru dimensiuni 101

STRĂDANII DE PERFECŢIONARE A PROCEDEELOR DE CALCUL
sau
De la abac la creierul electronic 133

ÎNCEPUTURILE CALCULULUI DIFERENŢIAL
sau
Cînd doi se ceartă al treilea cîştigă..... 160

PROBLEMA ARMONIEI FORMELOR GEOMETRICE
sau
Despre poliedrele regulate şi semiregulate.. 197

NOŢIUNEA DE GRUP
sau
Unde dai şi unde crapă..... 254